

# HEC/ESSEC 2019

## Éléments de correction

### Première partie

1. La matrice  $A$  est non nulle et ses deux colonnes sont colinéaires ; elle est donc de rang 1. Le calcul donne  $A^2 = A$  si bien que  $f$  est un projecteur. À ce titre, c'est un endomorphisme diagonalisable. Comme  $A$  est distincte de 0 et  $I_2$ ,  $f$  admet 0 et 1 pour valeurs propres, et l'on montre que les sous-espaces propres qui leur sont respectivement associés sont les droites dirigées par  $(1, 1)$  et  $(1, a)$ .
2. On obtient

$$M = {}^tAA = \frac{1+a^2}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable. Le calcul montre que  $\text{Ker } s_f = \text{Ker } f$  et que  $s_f$  admet pour valeurs propres 0 et  $2\frac{1+a^2}{(1-a)^2}$ , les sous-espaces propres associés étant les droites respectivement dirigées par  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ .

3. Si  $s_f$  est un projecteur, nécessairement non nul, alors  $\text{Sp } s_f = \{0, 1\}$  si bien que  $2\frac{1+a^2}{(1-a)^2} = 1$  c'est-à-dire  $a = -1$ . Réciproquement, pour  $a = -1$ ,  $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  vérifie  $M^2 = M$ . Ainsi  $s_f$  est un projecteur si, et seulement si,  $a = -1$ .

### Deuxième partie

4. a. Par définition,  $C = {}^tAB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  a pour coefficient générique

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

d'où l'expression de

$$\text{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,i} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

*Remarque.* Les expressions obtenues ci-dessus pour  $(A, B) = ({}^tM, N)$  et  $(A, B) = ({}^tN, M)$  sont égales. On retiendra donc la propriété utile pour la suite :

$$\forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}(MN) = \text{tr}(NM).$$

- b. On reconnaît dans l'expression obtenue en a. le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ .
- c. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\text{tr}({}^tMN)| = |(M|N)| \leq \|M\|_2 \|N\|_2 = \sqrt{\text{tr}({}^tMM)} \sqrt{\text{tr}({}^tNN)}.$$

En l'appliquant à  $M = A$  et  $N = {}^tA$ , qui partagent la même norme d'après l'expression obtenue en a., il vient :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr } A^2 \leq |\text{tr } A^2| \leq \text{tr}({}^tAA).$$

L'égalité a bien sûr lieu pour  $A = 0$ . Dans le cas  $A \neq 0$ , si l'égalité a lieu, alors la famille  $({}^tA, A)$  est liée d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  ${}^tA = \lambda A$ . On a alors  $\|A\|_2^2 = \text{tr}({}^tAA) = \lambda \text{tr } A^2 = \lambda \|A\|_2^2$ , d'où l'on tire  $\lambda = 1$  car  $\|A\|_2 > 0$ , si bien que  ${}^tA = A$ . La réciproque étant immédiate, l'égalité est réalisée si, et seulement si,  $A$  est symétrique.

5. a. La formule de changement de base s'écrit  $A' = P^{-1}AP$ .
- b. La matrice  $P$  est orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormales.
- c. D'après a. et b.,  $A' = {}^tPAP$  d'où  ${}^tA' = {}^tP^tAP = P^{-1}{}^tAP$ . Puisque l'endomorphisme  $f^*$  est représenté par  ${}^tA$  en base  $\mathcal{B}_0$ , il est donc représenté par la matrice  ${}^tA'$  en base  $\mathcal{B}$ , de nouveau d'après la formule de changement de base.
6. a. Pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2$  en identifiant  $AX \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à un élément de  $\mathbb{R}^n$ .
- b. Pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $AX = 0$  entraîne  ${}^tAAX = 0$  et réciproquement  ${}^tAAX = 0$  entraîne  ${}^tX{}^tAAX = 0$  c'est-à-dire  $\|AX\|^2 = 0$  et donc  $AX = 0$  d'après a.. Ainsi  $\text{Ker } f = \text{Ker } s_f$  puis, d'après le théorème du rang appliqué aux endomorphismes  $f$  et  $s_f$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{rg } f = n - \dim(\text{Ker } f) = n - \dim(\text{Ker } s_f) = \text{rg } s_f$ .

- c. L'endomorphisme  $s_f$  est représenté en base orthonormale  $\mathcal{B}_0$  par la matrice  ${}^tAA$  symétrique ; il est donc symétrique.
  - d. Étant donnée une valeur propre  $\lambda$  de  $s_f$ , il existe  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul tel que  ${}^tAAX = \lambda X$ , et l'on a alors  ${}^tX{}^tAAX = \lambda{}^tXX$  où  ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$ , si bien que  $\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$  d'après **a.**
  - e. D'après le théorème spectral appliqué à l'endomorphisme  $s_f$ , symétrique d'après **c.**, il existe une base orthonormale  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $s_f$ . Dans une telle base,  $s_f$  est représenté par une matrice diagonale de rang  $\text{rg } s_f = r$  d'après **b.**, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $s_f$  :  $n - r$  d'entre eux sont donc nuls et les autres sont strictement positifs d'après **d.** Quitte à réordonner les vecteurs de la base  $\mathcal{C}$ , l'endomorphisme  $s_f$  y est donc représenté par une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  où  $D \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$  est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.
  - f. Les vecteurs  $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$  forment une base de  $\text{Ker } s_f = \text{Ker } f$  d'après **b.** et **e.**, si bien que la matrice représentative de  $f$  en base  $\mathcal{C}$  est de la forme  $A' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $A_1 \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$  et  $A_3 \in \mathbf{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ . En comparant  ${}^tA'A' = \begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  à la matrice obtenue en **e.**, qui représentent toutes deux l'endomorphisme  $s_f$  en base  $\mathcal{C}$  d'après **5.c.**, on obtient  ${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D$ .
7. **a.** De l'égalité  ${}^t({}^tA) = A$ , on déduit que  $(f^*)^* = f$ . Par suite,  $\tau_f = s_{f^*}$  d'où, d'après **6.b.** appliqué à  $f$  et  $f^*$ , sachant par ailleurs que  $\text{rg } A = \text{rg } {}^tA$ ,  $\text{rg } \tau_f = \text{rg } s_{f^*} = \text{rg } f^* = \text{rg } f = \text{rg } s_f$ . Il en résulte, d'après le théorème du rang, que  $\dim(\text{Ker } \tau_f) = \dim(\text{Ker } s_f)$ .
- b.** Soient  $\lambda \neq 0$  une valeur propre de  $s_f$  et  $x$  un vecteur propre associé. On a  $f^*(f(x)) = \lambda x \neq 0$  d'où  $f(x) \neq 0$  et  $\tau_f(f(x)) = f \circ f^*(f(x)) = \lambda f(x)$ . Ainsi  $\lambda$  est aussi valeur propre de  $\tau_f$  et  $f(x)$  en est un vecteur propre associé à  $\lambda$ .  
Il en résulte que  $f$  induit une application linéaire injective de  $E_\lambda(s_f)$  dans  $E_\lambda(\tau_f)$ , d'où l'on déduit que  $\dim E_\lambda(s_f) \leq \dim E_\lambda(\tau_f)$ .
- c.** L'endomorphisme  $\tau_f = s_{f^*}$  est symétrique d'après **6.** ; il existe donc une base orthonormale  $\mathcal{C}'$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $\tau_f$ .  
En appliquant le résultat établi en **b.** à  $f^*$ , on obtient l'implication et les inégalités réciproques de celles déjà obtenues sachant que  $s_{f^*} = \tau_f$  et  $\tau_{f^*} = s_f$  : toute valeur propre  $\lambda \neq 0$  de  $\tau_f$  est aussi valeur propre de  $s_f$  avec  $\dim E_\lambda(\tau_f) \leq \dim E_\lambda(s_f)$ . En conclusion, les endomorphismes  $s_f$  et  $\tau_f$  présentent les mêmes valeurs propres et, pour chacune de ces valeurs propres (y compris éventuellement 0 d'après **a.**),  $\dim E_\lambda(s_f) = \dim E_\lambda(\tau_f)$ .  
*Remarque.* On parvient à la même conclusion en écrivant que toutes les inégalités sont nécessairement des égalités dans la chaîne d'inégalités
- $$n \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp } \tau_f} \dim E_\lambda(\tau_f) \geq \dim E_0(\tau_f) + \sum_{\substack{\lambda \in \text{Sp } s_f \\ \lambda \neq 0}} \dim E_\lambda(\tau_f) \geq \dim E_0(s_f) + \sum_{\substack{\lambda \in \text{Sp } s_f \\ \lambda \neq 0}} \dim E_\lambda(s_f) = n.$$
- d.** En notant  $P$  (resp.  $Q$ ) une matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_0$  à la base  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{C}'$ ), on a  $P^{-1}({}^tAA)P = Q^{-1}(A{}^tA)Q$  d'après **c.**, quitte à réordonner les vecteurs de  $\mathcal{C}'$ . Par suite,  $A{}^tA = \Omega^{-1}({}^tAA)\Omega$  pour  $\Omega = QP^{-1} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ .  
Enfin,  $P$  et  $Q$  sont orthogonales car les bases  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont orthonormales, si bien que  $\Omega = Q{}^tP$  aussi :  ${}^t\Omega\Omega = P{}^tQQ{}^tP = P{}^tP = I_n$ , de sorte que  $A{}^tA = {}^t\Omega({}^tAA)\Omega$ .
8. **a.** La partie  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^n$  est fermée comme intersection du fermé  $\mathcal{V}$  avec l'hyperplan fermé  $\mathcal{H}$  d'équation  $x_1 + \dots + x_n = 1$ . Elle est également bornée car  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{W}$  implique  $0 \leq x_i \leq 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , si bien que  $\mathcal{W}$  est inclus dans la boule fermée  $\mathcal{B}(0, \sqrt{n})$ .
- b.** La fonction  $\varphi$ , continue car polynomiale sur la partie  $\mathcal{W}$  fermée, bornée et non vide de  $\mathbb{R}^n$ , y est bornée et atteint ses bornes. Elle y admet donc un maximum global  $M$ . Soit  $a \in \mathcal{W}$  tel que  $M = \varphi(a)$ .
- c.** Pour  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ , il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $x_i = 0$ , de sorte que  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ .
- d.** Si on avait  $a \notin \mathcal{U}$ , alors on aurait  $M = \varphi(a) = 0$  si bien que  $\varphi$ , par ailleurs positive ou nulle sur  $\mathcal{W}$ , y serait identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. C'est donc que  $a \in \mathcal{U}$  et  $M$  est donc maximum de  $\varphi$  sur  $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{H}$ , c'est-à-dire maximum de  $\varphi$  sur  $\mathcal{U}$  sous la contrainte  $x_1 + \dots + x_n = 1$ .
- e.** La fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\mathcal{U}$  avec :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}, \quad \nabla \varphi(x) = \left( \prod_{i \neq 1} x_i, \dots, \prod_{i \neq n} x_i \right) = \varphi(x) \left( \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n} \right).$$

La contrainte  $\mathcal{H}$  définie par l'équation  $x_1 + \dots + x_n = 1$  est linéaire, dirigée par l'hyperplan vectoriel  $\mathcal{H}_0$  d'équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$ . Puisque la fonction  $\varphi$  admet au point  $a$  un extremum sous la contrainte  $\mathcal{H}$ , on a :

$$\begin{cases} a \in \mathcal{H} \\ \nabla\varphi(a) \in \mathcal{H}_0^\perp = \text{Vect}(1, \dots, 1) \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + \dots + a_n = 1 \\ a_1 = \dots = a_n \end{cases}.$$

Par suite,  $a = \frac{1}{n}(1, \dots, 1)$  et  $M = \varphi(a) = \frac{1}{n^n}$ .

**f.** Le cas  $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$  étant évident, on peut supposer  $\text{tr} S = \mu_1 + \dots + \mu_n > 0$ . On a alors  $\mu^* = \frac{1}{\text{tr} S}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{W}$  si bien, d'après **b.** et **e.**, que  $\varphi(\mu^*) = \frac{\varphi(\mu)}{(\text{tr} S)^n} \leq M$  i.e.

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left(\frac{\text{tr} S}{n}\right)^n$$

avec égalité si, et seulement si,  $\mu^* = a$ , ce qui équivaut à  $\mu_1 = \dots = \mu_n$  ou encore à l'existence d'un réel  $\lambda$  tel que  $S$  soit semblable à  $\lambda I_n$  c'est-à-dire  $S = \lambda I_n$ .

**g.** Il suffit d'appliquer le résultat de la question **f.** à la matrice symétrique  $S = xI_n + {}^tAA$ , dont  $(x + \lambda_1, \dots, x + \lambda_n)$  est une liste étendue de valeurs propres, toutes positives ou nulles d'après **6.d.** :

$$\prod_{i=1}^n (x + \lambda_i) \leq \left(\frac{\text{tr}(xI_n + {}^tAA)}{n}\right)^n = \left(x + \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n}\right)^n.$$

### Troisième partie

**9. a.** Dans une base adaptée à la décomposition  $\mathbb{R}^n = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$ ,  $f$  est représenté par la matrice  $A_0 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Puisque deux matrices représentatives de  $f$  sont semblables donc partagent la même trace, chacune d'elle a pour trace  $\text{tr} A_0 = r$ .

**b.** La relation  $f^2 = f$  s'écrit matriciellement  $A'^2 = A'$  en base  $\mathcal{C}$  i.e.

$$\begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ A_3 A_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit que  $A_1^2 = A_1$ . On a par ailleurs  $\text{tr} A_1 = \text{tr} A' = r$  d'après **a.** Ainsi  $A_1$  représente un projecteur de  $\mathbb{R}^r$  de rang  $\text{tr} A_1 = r$  d'après **a.**, c'est-à-dire  $\text{id}_{\mathbb{R}^r}$ , ce qui s'écrit matriciellement  $A_1 = I_r$ .

**c.** D'après **4.c.** et **a.**,  $\text{tr}({}^tAA) \leq \text{tr} A^2 = \text{tr} A = r$ . D'après **6.f.** et **b.**,  $D = {}^tA_1 A_1 + {}^tA_3 A_3 = I_n + {}^tA_3 A_3$ . Les valeurs propres  $\lambda \neq 0$  de  ${}^tAA$  étant les valeurs propres de  $D$ , ce sont les réels tels que  $\lambda - 1$  soit valeur propre de  ${}^tA_3 A_3$ ; on a alors  $\lambda - 1 \geq 0$  i.e.  $\lambda \geq 1$  d'après **6.d.** (également valable pour une matrice  $A_3$  rectangulaire).

**d.** Puisque  $r = \text{tr} A = \text{tr} A^2$  d'après **a.**, la relation  $\text{tr}({}^tAA) = r$  traduit le cas d'égalité dans l'inégalité de la question **4.c.**. Elle a donc lieu si, et seulement si,  $A$  est symétrique, ce qui signifie que le projecteur  $f$  est orthogonal.

En conclusion (en imaginant une petite maladresse dans l'énoncé), les projecteurs  $f$  réalisant l'égalité  $\text{tr}({}^tAA) = r$  sont les projecteurs orthogonaux.

**10. a.** Il vient  $({}^tAA)(A^tA) = {}^tA(A^2)^tA = {}^tA^2 = I_n$ , si bien que  ${}^tAA$  est inversible à droite donc inversible, d'inverse  $({}^tAA)^{-1} = A^tA$ .

**b.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  ${}^tAA$ . Puisque cette dernière matrice est inversible d'après **a.**, on a nécessairement  $\lambda \neq 0$ . Pour  $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a donc :

$$({}^tAA)X = \lambda X \iff \frac{1}{\lambda}X = ({}^tAA)^{-1}X \iff (A^tA)X = \frac{1}{\lambda}X.$$

Le réel  $\frac{1}{\lambda}$  est donc valeur propre de  $A^tA$ , avec  $E_\lambda({}^tAA) = E_{1/\lambda}(A^tA)$  d'où, d'après **7.c.**, valeur propre de  ${}^tAA$  avec  $\dim E_\lambda({}^tAA) = \dim E_{1/\lambda}(A^tA)$ .

**c.** Une brave étude de la fonction  $x \mapsto x + \frac{1}{x}$  montre que celle-ci est décroissante sur  $]0, 1]$  puis croissante sur  $[1, +\infty[$ , donc minimale en 1, d'où le résultat.

**d.** Il ressort de la question **b.** que dans la liste étendue  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de valeurs propres de  ${}^tAA$ , toutes strictement positives d'après **6.d.** et **a.**, chaque valeur propre  $\lambda$  apparaît autant de fois que la valeur propre  $\frac{1}{\lambda}$ . On en déduit que  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , ce qui permet de conclure en s'appuyant sur la question **c.** :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = \prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \prod_{i=1}^n \left(\sqrt{\lambda_i} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right) \geq 2^n.$$

- e. Dans le raisonnement ci-dessus, l'égalité est réalisée si, et seulement si,  $\lambda = 1$  est la seule valeur propre de  ${}^tAA$  d'après c., ce qui équivaut à  ${}^tAA = I_n$  puisque  ${}^tAA$  est diagonalisable, c'est-à-dire à  $A^{-1} = {}^tA$  ou encore à  $A = {}^tA$  puisque  $A^{-1} = A$ . Comme  $A$  est la matrice représentative de  $f$  en base orthonormale, la condition précédente signifie que l'endomorphisme  $f$  est symétrique. Il est dans ce cas nécessaire que les sous-espaces propres  $E_1(f)$  et  $E_{-1}(f)$  soient orthogonaux. Réciproquement, s'ils le sont, étant par ailleurs supplémentaires, alors  $f$  est représentée dans une base orthonormale adaptée par la matrice symétrique  $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & -I_{n-d} \end{pmatrix}$  où  $d = \dim E_1(f)$ , si bien que  $f$  est symétrique. En conclusion, l'égalité  $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = 2^n$  est réalisée si, et seulement si, les sous-espaces  $E_1(f)$  et  $E_{-1}(f)$  sont orthogonaux.

### Quatrième partie

11. La matrice  ${}^tAA$  est inversible comme produit de matrices inversibles. Ainsi 0 ne figure pas parmi les valeurs propres de  $s_f$ , qui sont donc toutes strictement positives d'après 6.d.. Le théorème spectral s'applique alors à l'endomorphisme  $s_f$ , symétrique d'après 6.c. : il existe une base orthonormale  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $s_f$ ; en notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées, strictement positives comme on vient de le voir, on a donc  $s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On définit alors un endomorphisme  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  par la donnée des images  $v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n$ , des vecteurs de la base  $\mathcal{C}$ . Cet endomorphisme est symétrique car il est représenté par la matrice symétrique  $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  en base orthonormale  $\mathcal{C}$  et ses valeurs propres  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$  sont positives ou nulles. Enfin, les endomorphismes  $v^2$  et  $s_f$  sont égaux car ils coïncident sur les vecteurs de la base  $\mathcal{C}$  : pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v^2(\varepsilon_i) = v(\sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i = s_f(\varepsilon_i)$ .

12. Soit  $\mu$  une valeur propre de  $w$ . Pour  $x \in E_\mu(w)$ , on a  $s_f(x) = w(w(x)) = w(\mu x) = \mu^2 x$  i.e.  $x \in E_{\mu^2}(s_f)$ , si bien que  $E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(s_f)$ . Par suite, sachant que les valeurs propres de  $w$  sont positives par hypothèse,

$$\sum_{\mu \in \text{Sp } w} \dim E_\mu(w) \leq \sum_{\mu \in \text{Sp } w} \dim E_{\mu^2}(s_f) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp } s_f} \dim E_\lambda(s_f),$$

où les deux sommes extrémales sont égales à  $n$  puisque les endomorphismes  $w$  et  $s_f$ , symétriques, sont diagonalisables. Toutes les inégalités intermédiaires sont donc des égalités, si bien que les valeurs propres de  $w$  sont les racines de celles de  $s_f$  (aucun terme n'a été oublié en passant de l'avant dernière à la dernière somme car les éventuels termes manquants seraient supérieurs ou égaux à 1) et, pour chaque valeur propre  $\mu$  de  $w$ ,  $\dim E_\mu(w) = \dim E_{\mu^2}(s_f)$ ; avec l'inclusion précédente, on en déduit que  $E_\mu(w) = E_{\mu^2}(s_f)$ .

13. L'existence a été justifiée en 11.. Quant à l'unicité, elle est apportée par le résultat de la question 12., qui montre que le comportement d'un tel endomorphisme est imposé sur chacun des sous-espaces supplémentaires  $E_\lambda(s_f)$  : il y agit comme l'homothétie de rapport  $\sqrt{\lambda}$ . La question 12. fait également apparaître que toute base orthonormale formée de vecteurs propres de  $s_f$  est également formée de vecteurs propres de  $v$ , qui y est donc représenté par une matrice diagonale.
14. C'est la reformulation matricielle du résultat précédent.
15. On raisonne par analyse-synthèse.

Soit  $(\Omega, S)$  un couple solution. On a alors  ${}^tAA = {}^tS^t\Omega\Omega S = S^2$  d'où, comme  ${}^tAA$  et  $S$  sont symétriques à valeurs propres positives,  $S = \sqrt{{}^tAA}$  d'après 14., inversible d'après 11., puis  $\Omega = AS^{-1}$ .

Réciproquement, la matrice  ${}^tAA$  étant symétrique à valeurs propres positives, la matrice  $S = \sqrt{{}^tAA}$  est bien définie d'après 14. et inversible car 0 n'en est pas valeur propre d'après 11., si bien que  $\Omega = AS^{-1}$  est bien définie. Il ne reste plus qu'à vérifier que  $\Omega$  est orthogonale, or

$${}^t\Omega\Omega = {}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n,$$

d'où le résultat.

### Cinquième partie

16. Le réel  $d(M)$  est bien défini comme borne inférieure d'une partie non vide et minorée par 0 de  $\mathbb{R}$ .

17. Soit  $R \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\|RN\|_2^2 = \text{tr}({}^tN^tRRN) = \text{tr}({}^tNN) = \|N\|_2^2$$

et de même  $\|NR\|_2 = \|N\|_2$ .

Ayant établi en 7.d. qu'un produit de matrices orthogonales est orthogonal, et remarquant sans peine que l'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale, les applications  $V \mapsto VR^{-1}$  et  $V \mapsto R^{-1}V$  sont bien définies sur  $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$  et à valeurs dans  $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ . Elles admettent respectivement pour réciproques les applications  $V \mapsto VR$  et  $V \mapsto RV$ , et sont donc bijectives.

Par suite,

$$\begin{aligned} d(RM) &= \inf_{V \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \|RM - V\|_2 = \inf_{V \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \|R(M - R^{-1}V)\|_2 \\ &= \inf_{V \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \|M - R^{-1}V\|_2 = \inf_{W \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \|M - W\|_2 = d(M) \end{aligned}$$

et de même  $d(MR) = d(M)$ .

18. On a successivement, d'après 17.,  $d(A) = d(\Omega PD^tP) = d(PD^tP) = d(D^tP) = d(D)$  car les matrices  $\Omega$ ,  $P$  et  ${}^tP$  sont orthogonales.

19. a. La matrice  $W$  est symétrique réelle donc diagonalisable.

b. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\langle w(x) | x \rangle = {}^tX^tWX = \frac{1}{2}({}^tX^tVX + {}^tXVX) = \frac{1}{2}(\langle v(x) | x \rangle + \langle x | v(x) \rangle) = \langle v(x) | x \rangle$$

et

$$\|v(x)\|^2 = {}^tX^tVVX = {}^tXX = \|x\|^2$$

puisque  $V$  est orthogonale. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$|\langle w(x) | x \rangle| = |\langle v(x) | x \rangle| \leq \|v(x)\| \|x\| = \|x\|^2$$

d'où l'on tire :

$$\langle x - w(x) | x \rangle = \|x\|^2 - \langle w(x) | x \rangle \geq \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0.$$

c. Étant donné une valeur propre  $\lambda$  de  $\text{id} - w$  et un vecteur propre  $x$  associé, on a  $\langle (\text{id} - w)(x) | x \rangle = \lambda \|x\|^2$  d'où

$$\lambda = \frac{\langle x - w(x) | x \rangle}{\|x\|^2} \geq 0$$

d'après b. car  $\|x\|^2 > 0$ .

d. En appliquant la dernière inégalité établie en b. au vecteur  $x = e_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on obtient  $1 - w_{i,i} = \langle e_i - w(e_i) | e_i \rangle \geq 0$ .

e. Si  $w_{i,i} = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors la matrice  $I_n - W$  admet une trace nulle, par ailleurs égale à la somme de ses valeurs propres d'après a., toutes positives ou nulles d'après c., et donc toutes nulles. La matrice  $I_n - W$  se retrouve alors semblable à la matrice nulle donc nulle :  $W = I_n$ .

Remarque. Une analyse fine du raisonnement de la question b. montre que le cas d'égalité conduit à  $V = I_n$  (puis  $W = I_n$ ).

20. a. Pour  $V \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ , il vient :

$$\begin{aligned} \|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 &= ((D - V) - (D - I_n) | (D - V) + (D - I_n)) \\ &= 2(I_n - V | D) - (I_n - V | I_n + V) \end{aligned}$$

où  $(I_n - V | I_n + V) = \|I_n\|_2^2 - \|V\|_2^2 = 0$  car  $V$  est orthogonale. Par suite,

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2(I_n - W | D) + 2(W - V | D) = 2(I_n - W | D)$$

car  $2(W - V | D) = ({}^tV - V | D) = 0$  puisque  ${}^tV - V$  est antisymétrique alors que  $D$  est symétrique :

$$({}^tV - V | D) = -\text{tr}(({}^tV - V)D) = -\text{tr}(D({}^tV - V)) = -(D | {}^tV - V) = 0.$$

b. En notant  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les coefficients diagonaux de  $D$ , strictement positifs d'après 18., on a :

$$(I_n - W | D) = \sum_{i=1}^n (1 - w_{i,i})\mu_i \geq 0$$

d'après **19.d.**, si bien que d'après **a.** :

$$\forall V \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \quad \|D - I_n\|_2 \leq \|D - V\|_2$$

avec égalité si, et seulement si,  $w_{i,i} = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , i.e.  $W = I_n$  d'après **19.e.**.

**c.** Il ressort de la question **b.** que :

$$d(D) = \inf_{V \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})} \|D - V\|_2 = \|D - I_n\|_2.$$

On peut alors conclure d'après **18.** :

$$d(A) = d(D) = \|P(D - I_n)^t P\|_2 = \|S - I_n\|_2 = \|\sqrt{^t A A} - I_n\|_2.$$

Si  $V \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$  vérifie  $d(A) = \|D - V\|_2$ , on a déjà signalé en **b.** que  $W = I_n$ , d'où l'on tire

$$\|I_n - V\|_2^2 = \|I_n\|_2^2 - 2(I_n | V) + \|V\|_2^2 = 2\|I_n\|_2^2 - (I_n | V) - (V | I_n) = 2 \operatorname{tr} I_n - 2 \operatorname{tr} W = 0$$

si bien que  $V = I_n$ .

