EMLYON 2019 S

Éléments de correction

Première partie

1. L'application Ψ_a est linéaire par linéarité de la dérivation, et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a $\Psi_a(1) = 2$ et
$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \Psi_a(X^j) = (j+2)X^j - jaX^{j-1},$$
d'où l'on déduit la matrice représentative de Ψ_a en base $\mathcal{B}$:
$$M = \begin{pmatrix} 2 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & -2a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}),$$
de coefficient générique
$$m_{i,j} = \begin{cases} 2+j & \text{si } i = j \\ -ja & \text{si } i = j-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n.$$

3. a. L'endomorphisme Ψ_a admet les mêmes valeurs propres que sa matrice représentative en base $\mathcal{B}$. Celle-ci étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi l'endomorphisme Ψ_a admet $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres deux-à-deux distinctes : $2, 3, \ldots, n+2$; il est donc diagonalisable.

b. Puisqu'il n'admet pas 0 pour valeur propre, l'endomorphisme Ψ_a de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie est inversible : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Le calcul donne immédiatement $\Psi_a(Q_k) = (k+2)Q_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

d. Puisque l'endomorphisme Ψ_a admet $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres deux-à-deux distinctes, ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1. D'après la question **c.**, le sous-espace propre $E_{k+2}(\Psi_a)$ est donc la droite dirigée par Q_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

4. a. Le calcul donne immédiatement :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \big((X-a)^2 P\big)' = (X-a)\Psi_a(P).$$

b. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il vient d'après **a.** :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad \Phi_a\big(\Psi_a(P)\big)(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x \big((t-a)^2 P(t)\big)' \, dt = \frac{1}{(x-a)^2} \big[(t-a)^2 P(t)\big]_a^x = P(x)$$
et les deux membres extrémaux sont encore égaux pour $x = a$, si bien qu'en identifiant un polynôme avec la fonction polynomiale associeé, $\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big) = P$.

c. Puisque Ψ_a est bijectif d'après **3.b.**, la formule de la question **b.** s'écrit $\Phi_a(Q) = \Psi_a^{-1}(Q)$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Cela montre d'une part que Φ_a est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ (ce qui n'était pas évident sur sa définition), et d'autre part que $\Phi_a = \Psi_a^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ comme réciproque d'un automorphisme, d'inverse $\Phi_a^{-1} = (\Psi_a^{-1})^{-1} = \Psi_a$.

d. D'après **3.c.** et **c.**, on a $\Phi_a(Q_k) = \frac{1}{k+2} Q_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Par suite, les $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ réels deux-à-deux distincts $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+2}$ sont valeurs propres de l'endomorphisme Φ_a, qui est donc diagonalisable et n'admet pas d'autre valeur propre.

Deuxième partie

5. a. Puisque la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $h : x \longmapsto \int_0^x tf(t) \, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $h'(x) = xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Soit $x > 0$ donné. La fonction f étant continue sur le segment $[0, x]$, elle y est bornée et atteint ses bornes : il existe $\alpha_x, \beta_x \in [0, x]$ tels que pour tout $t \in [0, x]$, $f(\alpha_x) \leqslant f(t) \leqslant f(\beta_x)$. On a alors, puisque $x > 0$:

$$f(\alpha_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \int_0^x tf(\alpha_x)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x tf(\beta_x)\,\mathrm{d}t = f(\beta_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t.$$

c. Le résultat précédent s'écrit encore :

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(\alpha_x)}{2} \leqslant \frac{h(x)}{x^2} \leqslant \frac{f(\beta_x)}{2}.$$

Or, lorsque $x \to 0$, α_x et β_x qui appartiennent à $[0, x]$ tendent vers 0 et, par continuité de f, $f(\alpha_x)$ et $f(\beta_x)$ tendent vers $f(0)$. Il en ressort donc par encadrement que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.$$

d. En définissant, pour $x < 0$ donné, α_x et β_x comme ci-dessus, il vient :

$$\forall t \in [0, x] \subset \mathbb{R}_-, \quad tf(\alpha_x) \geqslant tf(t) \geqslant tf(\beta_x)$$

puis, compte-tenu des bornes qui sont dans « le mauvais sens »,

$$\forall x < 0, \quad f(\alpha_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(\beta_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit de même par encadrement que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.$$

6. La fonction $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$ d'après **5.a.** avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \big(\Phi(f)\big)'(x) = \frac{xh'(x) - 2h(x)}{x^3} = \frac{f(x) - 2\Phi(f)(x)}{x}.$$

Elle est par ailleurs continue en 0 d'après **5.c.** et **5.d.**.

7. a. On considère la fonction $\check{f} : x \longmapsto f(-x)$, continue sur $\mathbb{R}$. Par changement de variable affine $u = -t$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \Phi(\check{f})(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^{-x} uf(u)\,\mathrm{d}u = \Phi(f)(-x),$$

les deux membres extrémaux étant encore égaux pour $x = 0$.
Si f est paire i.e. $\check{f} = f$, alors $\Phi(\check{f}) = \Phi(f)$, ce qui prouve que $\Phi(f)$ est paire d'après le calcul précédent.
Si f est impaire i.e. $\check{f} = -f$, alors $\Phi(\check{f}) = -\Phi(f)$, ce qui prouve que $\Phi(f)$ est impaire d'après le calcul précédent.

b. Si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)(x) \geqslant 0$ pour $x > 0$ (on intègre une fonction positive entre des bornes bien ordonnées), pour $x = 0$ et pour $x < 0$ (on intègre une fonction négative entre des bornes mal ordonnées).

8. a. La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$, on peut lui appliquer le résultat admis :

$$\Phi(g)(x) = \Phi(f)(x) - \frac{\ell}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

ce qui signifie que

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(f)(x) = \frac{\ell}{2}.$$

b. Si f admet ℓ pour limite en $-\infty$, alors $h = \check{f}$ admet ℓ pour limite en $+\infty$. D'après **a.**, on a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(\check{f})(x) = \frac{\ell}{2},$$

d'où il ressort d'après **7.a.** que

$$\Phi(f)(x) = \Phi(\check{f})(-x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{\ell}{2}.$$

Troisième partie

9. Pour $x>0$ et $t\in[0,x]$, la croissance de F donne $0\leqslant t\mathrm{F}(t)\leqslant t\mathrm{F}(x)$ d'où, par croissance de l'intégrale,
$$0\leqslant \mathrm{G}(x)\leqslant \frac{2}{x^2}\mathrm{F}(x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(x).$$
Pour $x<0$ et $t\in[0,x]\subset\mathbb{R}_-$, on a cette fois $0\leqslant \mathrm{F}(x)\leqslant\mathrm{F}(t)$ d'où $0\geqslant t\mathrm{F}(x)\geqslant t\mathrm{F}(t)$ puis, en tenant compte de l'ordre des bornes, $0\leqslant\mathrm{F}(x)\leqslant\mathrm{G}(x)$.

10. Par application directe de la question **6.** à la fonction F, continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction de répartition d'une variable à densité, on justifie que $\mathrm{G}=2\Phi(\mathrm{F})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec :
$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad \mathrm{G}'(x)=\frac{2}{x}\big(\mathrm{F}(x)-\mathrm{G}(x)\big).$$

11. Il ressort de la questions **9.** et **10.** que g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, elle admet pour primitive G sur $\mathbb{R}^*$, qui est continue en 0 d'après **6.** et admet pour limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$ d'après la question **8.**, ce qui garantit la convergence et donne la valeur de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\mathrm{G}(x)-\lim_{x\to-\infty}\mathrm{G}(x)+\lim_{x\to+\infty}\mathrm{G}(x)-\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\mathrm{G}(x)=1.$$
Toutes les conditions sont donc réunies pour que g soit une densité de probabilité. Soit V une variable aléatoire de densité g. Comme on l'a vu ci-dessus, G est une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$ et diffère donc d'une constante de la fonction de répartition de V sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ où g est continue. L'examen des limites en $-\infty$ et $+\infty$ montre que ces constantes sont nulles, si bien que G, par ailleurs continue en 0, est la fonction de répartition de V.

12. a. La fonction h_1 est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0) avec :
$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \int_0^x h_1(t)\,\mathrm{d}t=1-\mathbf{e}^{-x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1.$$
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}h_1(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et égale à 1, ce qui fait de h_1 une densité de probabilité.

b. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}\big(0,(\frac{1}{\sqrt2})^2\big)$, de densité $\varphi\,:\,t\in\mathbb{R}\longmapsto\frac{1}{\sqrt\pi}\mathbf{e}^{-t^2}$. La variable Y admet espérance et variance égales à $\mathbb{E}(\mathrm{Y})=0$ et $\mathbb{V}(\mathrm{Y})=\frac12$. On en déduit la convergence de l'intégrale ci-dessous avec, par parité de φ,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} th_1(t)\,\mathrm{d}t=2\sqrt\pi\int_0^{+\infty}t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\sqrt\pi\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\sqrt\pi\,\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2),$$
ce qui garantit l'existence et donne la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1)=\sqrt\pi\,\mathbb{V}(\mathrm{Y})=\frac{\sqrt\pi}{2}$.

c. On a tout d'abord
$$\mathrm{H}_1\,:\,x\in\mathbb{R}\longmapsto\int_{-\infty}^x h_1(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant0\\ 1-\mathbf{e}^{-x^2} & \text{si } x>0\end{cases}.$$
Par suite, $\mathrm{H}_2(x)=0$ pour $x=0$ et $x<0$ alors que pour $x>0$,
$$\mathrm{H}_2(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x t\mathrm{H}_1(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{x^2}\int_0^x\big(t-t\mathbf{e}^{-t^2}\big)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}\big[t^2+\mathbf{e}^{-t^2}\big]_0^x=1-\frac{1-\mathbf{e}^{-x^2}}{x^2}.$$
La variable X_2 admet donc pour densité
$$h_2\,:\,x\in\mathbb{R}\longmapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant0\\ \frac{2}{x^3}\big(1-(1+x^2)\mathbf{e}^{-x^2}\big) & \text{si } x>0\end{cases}.$$
On observe que $h_2(x)=o(\frac{1}{x^2})$ lorsque $x\to+\infty$, si bien que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}th_2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}th_2(t)\,\mathrm{d}t$ converge (la convergence étant automatique en 0 puisque h_2 est une densité), ce qui garantit l'existence de $\mathbb{E}(\mathrm{X}_2)$.

Quatrième partie

13. a. Ilsuffit, pour $x, y \in \mathbb{R}$, de développer le membre de gauche dans l'inégalité $\big(|x| - |y|\big)^2 \geqslant 0$.

b. Pour $f, g \in \mathrm{E}_2$, la fonction $x \longmapsto f(x)g(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec, d'après **a.**,

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f(x)g(x)| \leqslant \frac{f(x)^2 + g(x)^2}{2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ est donc absolument convergente par comparaison aux intégrales convergentes $\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} g(x)^2\,\mathrm{d}x$.

14. La fonction nulle appartient bien sûr à E_2. Pour $f, g \in \mathrm{E}_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \big(\lambda f(x) + g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \lambda^2 \int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x + 2\lambda \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} g(x)^2\,\mathrm{d}x$$

est convergente comme somme d'intégrales convergentes d'après **13.b.**, si bien que $\lambda f + g \in \mathrm{E}_2$. Ainsi E_2 vérifie le critère de sous-espace vectoriel de E.

15. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale généralisée convergente et clairement symétrique. Par ailleurs pour $f \in \mathrm{E}_2$,

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

avec égalité si, et seulement si, $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ i.e. $f = 0$ puisque la fonction f^2 est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. Toutes les conditions sont donc réunies pour que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E_2.

16. a. D'après les questions **5.c.** et **5.d.**, qui s'appliquent car f est continue,

$$\frac{h(x)^2}{x^4} = \Big(\frac{h(x)}{x^2}\Big)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f(0)^2}{4}.$$

Par suite,

$$\frac{h(x)^2}{x^3} = x\frac{h(x)^2}{x^4} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

b. Soit $\mathrm{X} > 0$. On remarque pour commencer que l'intégrale $\int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie comptetenu de la continuité de la fonction $x \longmapsto f(x)\Phi(f)(x)$ sur $[0, +\infty[$ (cf. question **6.**). La fonction $x \longmapsto \frac{h(x)^2}{x^4}$ est quant à elle prolongeable par continuité à $[0, +\infty[$ d'après **a.**, si bien que l'intégrale $\int_0^{\mathrm{X}} \frac{h(x)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x$ est faussement généralisée.
On obtient ensuite, par intégration par parties sur $[\varepsilon, \mathrm{X}] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{\mathrm{X}} \frac{h(x)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x &= \Big[-\frac{h(x)^2}{3x^3}\Big]_\varepsilon^{\mathrm{X}} + \int_\varepsilon^{\mathrm{X}} \frac{2h(x)h'(x)}{3x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{h(\varepsilon)^2}{3\varepsilon^3} - \frac{h(\mathrm{X})^2}{3\mathrm{X}^3} + \frac{2}{3}\int_\varepsilon^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Un passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ conduit alors à la relation attendue d'après **a.** :

$$\int_0^{\mathrm{X}} \frac{h(x)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\frac{h(\mathrm{X})^2}{\mathrm{X}^3} + \frac{2}{3}\int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. Si $\int_0^{\mathrm{X}} f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[0, \mathrm{X}]$ puisque la fonction f^2 est continue et positive, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors évidente.
Si $\int_0^{\mathrm{X}} f(x)^2\,\mathrm{d}x \neq 0$, il apparaît sur la formule

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{\mathrm{X}} \big(\lambda f(x) + \Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \lambda^2 \int_0^{\mathrm{X}} f(x)^2\,\mathrm{d}x + 2\lambda \int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\mathrm{X}} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x$$

montre que la fonction $\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^{\mathrm{X}} \big(\lambda f(x) + \Phi(f)(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$ est polynomiale de degré 2. Puisqu'elle est à valeurs positives, elle ne peut avoir deux racines distinctes. Le discriminant associé est donc négatif ou nul :

$$4\Big(\int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2 - 4\Big(\int_0^{\mathrm{X}} f(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_0^{\mathrm{X}} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x\Big) \leqslant 0,$$

d'où :

$$\int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \Big|\int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \Big(\int_0^{\mathrm{X}} f(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_0^{\mathrm{X}} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

d. D'après **b.** et **c.**, on a pour $\mathrm{X} > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{X}} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{X}} \frac{h(x)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{2}{3}\int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{2}{3}\Big(\int_0^{\mathrm{X}} f(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_0^{\mathrm{X}} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

En divisant les deux membres par l'intégrale $\int_0^{\mathrm{X}} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, à moins que celle-ci ne soit nulle auquel cas l'inégalité attendue est évidente, on obtient :

$$\Big(\int_0^{\mathrm{X}} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \leqslant \frac{2}{3}\Big(\int_0^{\mathrm{X}} f(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

e. Il ressort de la question **d.** que les intégrales partielles de la fonction continue $\Phi(f)^2$ sont majorées : sachant que $f \in \mathrm{E}_2$,

$$\forall \mathrm{X} > 0, \quad \int_0^{\mathrm{X}} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}\int_0^{\mathrm{X}} f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Puisque la fonction $\Phi(f)^2$ est positive, son intégrale $\int_0^{+\infty} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x$ est donc convergente, d'où l'on déduit que $\Phi(f)$ appartient à E_2.
En passant à la limite lorsque $\mathrm{X} \to +\infty$ dans l'inégalité établie en **d.**, on obtient alors :

$$\|\Phi(f)\| = \Big(\int_0^{+\infty} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \leqslant \frac{2}{3}\Big(\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} = \frac{2}{3}\,\|f\|\,.$$

f. D'après les questions **13.b.** et **e.**, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. On en déduit, ainsi que de la relation établie en **b.**, que

$$\mathrm{X}\Phi(f)(\mathrm{X})^2 = \frac{h(\mathrm{X})^2}{\mathrm{X}^3} = 2\int_0^{\mathrm{X}} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_0^{\mathrm{X}} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x$$

admet une limite finie κ lorsque $\mathrm{X} \to +\infty$. L'hypothèse $\kappa \neq 0$ conduirait à $0 \leqslant \Phi(f)(\mathrm{X})^2 \sim \frac{\kappa}{\mathrm{X}}$ lorsque $\mathrm{X} \to +\infty$, ce qui contredirait la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \Phi(f)(x)^2\,\mathrm{d}x$ établie en **e.**. C'est donc que $\kappa = 0$.

g. En passant à la limite lorsque $\mathrm{X} \to +\infty$ dans la relation établie en **b.**, on obtient alors :

$$\|\Phi(f)\|^2 = \int_0^{+\infty} \frac{h(x)^2}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} f(x)\Phi(f)(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,\langle \Phi(f), f\rangle\,.$$

Cinquième partie

17. Le script ci-dessous propose un calcul itératif.

Listing 1 : calcul du terme général de la suite (v_n)

```
function v=suite_v(n)
  v=0;
  for k=1:n
    v=v+k*suite_u(k);
  end
  v=v/n/(n+1);
endfunction
```


18. a. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge. On notera ℓ sa limite.

b. Les graphes fournis permettent de conjecturer que (v_n) est décroissante et converge vers $\frac{1}{2}\ell$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de $(u_k)_k$, il vient par sommation arithmétique :

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k \geqslant \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_n = \frac{u_n}{2}$$

et :

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{1}{2n(2n+1)}\Big(\sum_{k=1}^{n} ku_k + \sum_{k=n+1}^{2n} ku_k\Big) \leqslant \frac{1}{2n(2n+1)}\Big(\sum_{k=1}^{n} ku_k + \sum_{k=n+1}^{2n} ku_{n+1}\Big) \\ &= \frac{1}{2n(2n+1)}\Big(n(n+1)v_n + n\frac{n+1+2n}{2}u_{n+1}\Big) = \frac{n+1}{2(2n+1)}v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)}u_{n+1}. \end{aligned}$$

d. Il vient aisément, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+2)v_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} ku_k = \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n} ku_k + (n+1)u_{n+1}\Big) = nv_n + u_{n+1}$$

d'où, en retranchant $2v_{n+1} + nv_n$ aux deux membres puis en divisant par n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1}).$$

e. D'après **c.** et **d.**, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1}) \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si bien que la suite (v_n) est décroissante. Clairement minorée par 0, elle est donc convergente ; soit ℓ' sa limite. En passant à la limite dans les deux inégalités de la question **c.**, on obtient alors $\ell' \geqslant \frac{1}{2}\ell$ et $\ell' \leqslant \frac{1}{4}\ell' + \frac{3}{8}\ell$, soit $\ell' = \frac{\ell}{2}$.

19. a. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on obtient par permutation des sommes finies puis par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} ku_k \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} ku_k \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{\mathrm{N}+1}\Big) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} u_k - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}}. \end{aligned}$$

b. Puisque (u_n) et (v_n) sont à termes positifs et que la série $\sum u_n$ converge, il vient d'après **a.** :

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$ est majorée, et comme cette dernière est à termes positifs, elle est donc convergente.

c. De **a.** et **b.**, on déduit que

$$\mathrm{N}v_{\mathrm{N}} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n$$

admet une limite finie κ lorsque $\mathrm{N} \to \infty$. Si cette limite était non nulle, on aurait $0 \leqslant v_{\mathrm{N}} \sim \frac{\kappa}{\mathrm{N}}$ lorsque $\mathrm{N} \to \infty$, ce qui contredirait la convergence de la série $\sum v_n$ établie en **b.**. C'est donc que $\kappa = 0$.

d. En passant à la limite lorsque $\mathrm{N} \to \infty$ dans la relation de la question **b.**, il vient d'après **c.** :

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

20. a. Comme la série de terme général $u_n = \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, il en va de même d'après **19.b.** de celle de terme général

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

avec, d'après **19.d.**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = 1.$$

Il existe donc une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(\mathrm{Z} = n) = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Puisque $\mathrm{Y} \geqslant 1$, on a $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) \geqslant 1$. Par suite,

$$\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(\mathrm{Y}) \neq 0$$

si bien que

$$\mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(Y = k) \sim \frac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}, \quad n \to \infty.$$

On en déduit que $n\,\mathbb{P}(Z = n) \sim \frac{\mathbb{E}(Y)}{n} \geqslant 0$ est le terme général d'une série divergente, si bien que la variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance.