

ECRICOME 2019 S

Éléments de correction

Premier exercice

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est l'intégrale de la fonction $t \mapsto (\cos t)^n$, continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Il vient :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 1$$

et, par linéarisation,

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$ si bien que $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$ puis, par croissance de l'intégrale, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

Ainsi la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, et par suite convergente.

b. Par intégration par parties, il vient pour $n \in \mathbb{N}$, en dérivant $t \mapsto \cos^{n+1} t$ et en primitivant $t \mapsto \cos t$:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \cos t dt = [\cos^{n+1} t \sin t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^n t dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^n t dt = (n+1)(I_n - I_{n+2}). \end{aligned}$$

Il en ressort que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n. \quad (1)$$

c. Les formules proposées peuvent être justifiées par récurrence à partir de (1). Elles sont correctes pour $n = 0$ d'après 1. et, si elles sont acquises pour un entier n donné, alors

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} = \frac{2n+2}{2n+2} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{2n+2}{2n+2} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!},$$

ce qui constitue le résultat au rang $n+1$.

d. Le script ci-dessous s'appuie sur la relation de récurrence établie en b..

Listing 1 : calcul des premiers termes de la suite (I_n)

```
function y=I(n)
u=zeros(1,2n+2);
u(0)=%pi/2;
u(1)=1;
for k=1:n
    u(2*k)=(2*k-1)/(2*k)*u(2*k-2);
    u(2*k+1)=(2*k)/(2*k+1)*u(2*k-1);
end
y=u;
endfunction
```

Remarque. Le sujet ne semble pas prendre en compte le fait que Scilab n'autorise pas la numérotation des éléments d'un vecteur à partir de 0, et il aurait donc fallu gérer un décalage dans la numérotation...

3. a. On a

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+u) \sim u, \quad u \rightarrow 0.$$

b. Puisque $\cos \frac{1}{n^{1/4}} \rightarrow 1$, il vient (on peut composer à l'intérieur mais pas à l'extérieur) :

$$n \ln \left(\cos \frac{1}{n^{1/4}} \right) \sim n \left(\cos \frac{1}{n^{1/4}} - 1 \right) \sim n \left(-\frac{1}{2n^{1/2}} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{n} \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Par suite,

$$\left(\cos \frac{1}{n^{1/4}} \right)^n = \exp \left[n \ln \left(\cos \frac{1}{n^{1/4}} \right) \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

c. On obtient de même :

$$n \ln \left(\cos \frac{1}{n^{2/3}} \right) \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n^{1/3}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

puis

$$\left(\cos \frac{1}{n^{2/3}} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

4. On note $\varepsilon_n = \frac{1}{n^{1/4}} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. En utilisant l'encadrement $0 \leq \cos t \leq 1$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, il vient directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\varepsilon_n} \cos^n t \, dt \leq \varepsilon_n.$$

b. Par décroissance et positivité de \cos sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\varepsilon_n}^{\pi/2} \cos^n t \, dt \leq \int_{\varepsilon_n}^{\pi/2} \cos^n \varepsilon_n \, dt \leq \frac{\pi}{2} \cos^n \varepsilon_n.$$

c. D'après **a.**, **b.** et **3.b.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n = \int_0^{\varepsilon_n} \cos^n t \, dt + \int_{\varepsilon_n}^{\pi/2} \cos^n t \, dt \leq \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{\pi}{2} \left(\cos \frac{1}{n^{1/4}} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

si bien que (I_n) converge vers 0 par encadrement.

5. a. En posant $\delta_n = \frac{1}{n^{2/3}} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on montre de même, par décroissance et positivité de \cos sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et positivité de l'intégrale, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \geq \int_0^{\delta_n} \cos^n t \, dt \geq \int_0^{\delta_n} \cos^n \delta_n \, dt = \delta_n \cos^n \delta_n \geq 0.$$

Puisque $\delta_n \cos^n \delta_n \sim \delta_n$ d'après **3.c.**, la série $\sum \delta_n \cos^n \delta_n$ est divergente par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$ ($\frac{2}{3} \leq 1$), et il en ressort que la série $\sum I_n$ est également divergente.

b. Le script ci-dessous convient :

Listing 2 : calcul des premiers termes de la suite (I_n)

```

function y=SPI(n)
    u=I(n);
    y=sum(u(0:n));
endfunction
    
```

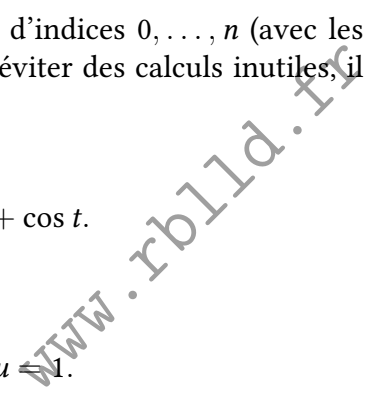
où le vecteur $u(0:n)$ est le sous-vecteur de u composé des éléments d'indices $0, \dots, n$ (avec les mêmes réserves que dans la remarque suivant la question **2.d.**). Pour éviter des calculs inutiles, il suffit de considérer $u=I(\text{floor}(n/2))$.

6. a. Il vient :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = 1 + \cos t.$$

b. Par changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$, on obtient d'après **a.** :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \tan^2 \frac{t}{2} \right) \frac{dt}{2} = \int_0^1 du = 1.$$



c. Pour $n \in \mathbb{N}$, il vient par linéarité de l'intégrale et sommation géométrique finie de raison $-\cos t \neq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k &= \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{k=0}^n (-\cos t)^k \right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} + (-1)^n \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{n+1} t}{1 + \cos t} dt \end{aligned}$$

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, en écrivant que $1 + \cos t \geq 1$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, il vient :

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{n+1} t}{1 + \cos t} dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t dt = I_{n+1},$$

d'où le résultat.

e. En s'appuyant sur 4.c., on déduit par encadrement de d. que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{n+1} t}{1 + \cos t} dt = 0,$$

si bien que la suite des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n I_n$ est convergente d'après c.. Ceci justifie la convergence de la série $\sum (-1)^n I_n$, avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} = 1$$

d'après b..



Deuxième exercice

1. On obtient immédiatement $S^2 = I_3$. Ainsi le polynôme $X^2 - 1$ est-il annulateur de S, et les valeurs propres de S en sont donc racines. Les réels 1 et -1 sont donc les seules valeurs propres éventuelles de la matrice S. Réciproquement,

$$\text{rg}(M - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 < 3 \quad \text{et} \quad \text{rg}(M + I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 < 3,$$

si bien que 1 et -1 sont valeurs propres de S.

En conclusion, les valeurs propres de la matrice S sont 1 et -1 .

2. Pour $X = {}^t(x \ y \ z) \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} SX = X &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \iff X \in F \\ &\iff x = z \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il en ressort que le sous-espace propre de S pour la valeur propre 1 est le sous-espace F et qu'il est engendré par les vecteurs ${}^t(1 \ 0 \ 1)$ et ${}^t(0 \ 1 \ 0)$. Comme ces derniers sont linéairement indépendants, ils en forment une base.

De même,

$$\begin{aligned} SX = -X &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \iff X \in G \\ &\iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

www.rblld.fr

Le sous-espace propre de S pour la valeur propre -1 est donc égal à G et admet pour base la famille formée du vecteur ${}^t(1 \ 0 \ -1)$.

3. Les sous-espaces F et G , en tant que sous-espaces propres de S pour des valeurs propres distinctes, sont en somme directe. Sachant par ailleurs que $\dim F + \dim G = 3$ d'après 2., on en déduit qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : F \oplus G = \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. a. La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est symétrique réelle donc diagonalisable.

- b. En notant $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = SX = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet pour coefficient générique

$$y_i = \sum_{j=1}^n s_{i,j}x_j = x_{n+1-i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

En d'autres termes,

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

- c. La matrice $T = S^2 = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ admet pour coefficient générique

$$t_{i,j} = \sum_{k=1}^n s_{i,k}s_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

car le terme $s_{i,k}s_{k,j}$ est non nul si, et seulement si, $i = n + 1 - k = j$. Dans la somme précédente, tous les termes sont donc nuls si $i \neq j$ alors que pour $i = j$, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n + 1 - i$ qui est égal à 1.

Il en ressort que $S^2 = I_n$.

5. Plutôt que de généraliser la démarche déployée en 2. et 3., il est plus simple d'anticiper légèrement sur la question b. (par ailleurs évidente...) : d'après 4.b., F (resp. G) est le sous-espace propre de S pour la valeur propre 1 (resp. -1). Sachant que S est diagonalisable d'après 4.a. et que ses valeurs propres se trouvent parmi les racines du polynôme $X^2 - 1$, annulateur de S d'après 4.c., ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ce qui s'écrit $F \oplus G = \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou plus explicitement :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \exists!(Y, Z) \in F \times G, \quad X = Y + Z.$$

6. a. Les matrices AS et SA de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ ont respectivement pour coefficients génériques

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k}s_{k,j} = a_{i,n+1-j} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n s_{i,k}a_{k,j} = a_{n+1-i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

qui sont égaux par hypothèse. Elles sont donc égales.

Remarque. L'endomorphisme canoniquement associé à A en base canonique (e_1, \dots, e_n) est représenté en base (e_n, \dots, e_1) par la matrice de coefficient générique

$$a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

c'est-à-dire aussi par la matrice A . D'après la formule de changement de base, cela s'écrit $S^{-1}AS = A$ (car S est la matrice de passage de (e_1, \dots, e_n) à (e_n, \dots, e_1)) ou encore $AS = SA$.

- b. D'après a., $ASX = SAX = \lambda SX$ où $SX \neq 0$ d'après 4.b. puisque $X \neq 0$ (l'un de ses coefficients est non nul). Ainsi SX est vecteur propre de A pour la valeur propre λ .

- c. On considère plutôt $Y = \frac{1}{2}(X + SX)$, qui appartient au sous-espace propre de A pour la valeur propre λ , comme combinaison linéaire d'éléments de celui-ci d'après b. : $AY = \lambda Y$.

Remarque. L'intérêt du vecteur précédent par rapport à celui de l'énoncé est qu'il s'agit de celui de la question 5.a. intervenant dans la décomposition de X . En effet, la question 4.c. permet de vérifier sans difficulté que $SY = Y$ alors que le vecteur $Z = X - Y = \frac{1}{2}(X - SX)$ vérifie quant à lui $SZ = -Z$.

- d. On ne peut avoir $Y = Z = 0$ dans la décomposition de $X \neq 0$ de la question 5.a.. D'après la question c. et la remarque qui suit, cela met donc en évidence un vecteur symétrique ou antisymétrique non nul dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

Problème

Première partie

1. Avant le deuxième tirage, l'urne contient trois boules, dont 1 ou 2 blanches. La variable X_1 est donc à valeurs dans $\{1, 2\}$.

Par ailleurs, l'événement $[X_1 = 1]$ (resp. $[X_1 = 2]$) se réalise si, et seulement si, le premier tirage a renvoyé une boule blanche (resp. noire). Par suite, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.

La variable X_1 suit donc la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Elle admet espérance et variance données par $\mathbb{E}(X_1) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{4}$.

2. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k l'événement « le k -ième tirage amène une boule blanche ».

On a $[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2$ d'où

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

car, sachant B_1 réalisé, l'événement B_2 est réalisé si, et seulement si, le deuxième tirage renvoie la boule blanche parmi les trois boules qui composent l'urne.

De même,

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, par incompatibilité,

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)) = \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Après chacun des k premiers tirages, on a ajouté une boule dans l'urne, blanche ou noire. Avant le $k + 1$ -ième tirage, le nombre de boules blanches présentes dans l'urne est donc un entier quelconque entre 1 et $k + 1$: $X_k(\Omega) = \llbracket 1, k + 1 \rrbracket$.
4. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 1, k + 1 \rrbracket$. Sachant l'événement $[X_k = j]$ réalisé, les seules valeurs possibles pour X_{k+1} sont j et $j + 1$: la première (resp. seconde) sera prise par X_{k+1} si, et seulement si, le $k + 1$ -ième tirage amène l'une des j boules blanches (resp. $k + 2 - j$ boules noires) parmi les $k + 2$ boules que compte l'urne. Ainsi,

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = \begin{cases} \frac{j}{k+2} & \text{si } i = j \\ 1 - \frac{j}{k+2} & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable X_k et la question 4.,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k+1} = i) &= \sum_{j \in X_k(\Omega)} \mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) \mathbb{P}(X_k = j) = \sum_{\substack{j \in X_k(\Omega) \\ j \in \{i-1, i\}}} \mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) \mathbb{P}(X_k = j) \\ &= \frac{i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{k+2}\right) \mathbb{P}(X_k = i-1), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Le passage d'une somme à l'autre (y compris la somme en extension de la deuxième ligne) dans le calcul ci-dessus se justifie par l'ajout ou le retrait de termes nuls.

6. On obtient :

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{24}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{11}{24}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{11}{24} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{1}{24}.$$

7. a. D’après la formule de la question 5. appliquée à $i = 1$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = 1)$$

d’où l’on déduit, par récurrence immédiate, que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Remarque. On peut également donner une justification probabiliste directe du résultat : avec les notations introduites en 2., on a $[X_k = 1] = B_1 \cap \dots \cap B_k$ d’où, d’après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \dots \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

car, sachant l’événement $B_1 \cap \dots \cap B_{j-1}$ réalisé pour $2 \leq j \leq k$, la réalisation de l’événement B_j correspond au tirage de l’unique boule blanche parmi les $j + 1$ que contient l’urne, si bien que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{j-1}}(B_j) = \frac{1}{j+1}$.

b. Vu les rôles symétriques des boules blanches et noires dans l’expérience, la variable $Y_k = k + 2 - X_k$ donnant le nombre de boules noires présentes dans l’urne avant le $k + 1$ -ième tirage suit la même loi que X_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par suite, d’après a.,

$$\mathbb{P}(X_k = k + 1) = \mathbb{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in \llbracket 1, k + 1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_k = i) = \mathbb{P}(X_k = k + 2 - i).$$

c. Il vient d’après 5. et a. :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = (k+2)! \left(\frac{2}{k+2} \mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{k+1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = 1) \right) = 2a_k + k + 1.$$

Par suite,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_{k+1} = a_{k+1} + k + 3 = 2(a_k + k + 2) = 2b_k,$$

si bien que la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = 2^k b_0 = 2^{k+1}.$$

Il en ressort que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{b_k - k - 2}{(k+1)!} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

Deuxième partie

8. Les variables n et b contiennent respectivement, à tout instant, le nombre de boules noires et blanches présentes dans l’urne. Chaque passage dans la boucle correspond à un tirage. La ligne 5 affecte à la variable r la réalisation d’une variable aléatoire R de loi uniforme sur $\llbracket 1, n + b \rrbracket$. On peut donc considérer que l’événement $[R \leq n]$ correspond au tirage d’une boule noire, alors que l’événement $[R > n]$ correspond au tirage d’une boule blanche. L’alternative des lignes 6-10 consiste donc à mettre à jour la composition de l’urne après le i -ième tirage. L’instruction `mystere(k)` renvoie donc une simulation de la loi de X_k .

Est-il attendu qu’on justifie la simulation de la loi uniforme sur $\llbracket 1, n + b \rrbracket$? Il suffit pour cela de remarquer que si U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $\lfloor (n + b)U + 1 \rfloor = j$ équivaut à $\frac{j-1}{n+b} \leq U < \frac{j}{n+b}$, or les $n + b$ événements $[\frac{j-1}{n+b} \leq U < \frac{j}{n+b}]$, $1 \leq j \leq n + b$, forment un système complet et ont tous pour probabilité $\frac{1}{n+b}$.

9. À présent que le mystère est levé, on notera `simulX` la fonction de la question 8..

Listing 3 : calcul empirique de la loi de X_k

```
function LE=loi_exp(k,N)
    LE=zeros(1,k+1);
    for j=1:N
        s=simulX(k);
        LE(s)=LE(s)+1;
    end
    LE=LE/N;
endfunction
```

10. Il s'agit de calculer récursivement la loi de X_n en utilisant la formule de la question 5..

Listing 4 : calcul de la loi de X_n

```
function LT=loi_th(n)
    M=zeros(n,n+1); // M(k,i) est destiné à contenir P(X_k=i)
    M(1,1)=1/2;
    M(1,2)=1/2;
    for k=1:(n-1)
        M(k+1,1)=1/(k+2)*M(k,1);
        for i=2:(k+1)
            M(k+1,i)=i/(k+2)*M(k,i)+(3+k-i)/(k+2)*M(k,i-1);
        end
        M(k+1,k+2)=1/(k+2)*M(k,k+1);
    end
    LT=M(n,:); // on renvoie la dernière ligne de M
endfunction
```

11. Les résultats obtenus ne satisfont pas la propriété de symétrie $\mathbb{P}(X_5 = k) = \mathbb{P}(X_5 = 7 - k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ justifiée en 7.b. ; il ne peut donc s'agir que d'une approximation : ils ont été obtenus avec la fonction `loi_exp`.

Troisième partie

12. a. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, la variable X_k est finie donc admet une espérance. La formule de la question 5. donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} i \mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{i^2}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=0}^{k+1} \frac{j+1}{k+2} (k+2-j) \mathbb{P}(X_k = j) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \left(\frac{k+1}{k+2} j + 1 \right) \mathbb{P}(X_k = j) = \frac{k+1}{k+2} \mathbb{E}(X_k) + 1. \end{aligned}$$

b. On justifie la formule par récurrence. Elle est évidente pour $k = 0$ puisque $X_0 = 1$ et, si elle est acquise à un rang $k \in \mathbb{N}$ donné, alors

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} \mathbb{E}(X_k) + 1 = \frac{k+1}{2} + 1 = \frac{k+3}{2}$$

d'après la question a..

c. On a déjà expliqué en 7.b. que les variables X_k et Y_k ont même loi ; elles ont donc même espérance. Sachant par ailleurs que $X_k + Y_k = k + 2$, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2} (\mathbb{E}(X_k) + \mathbb{E}(Y_k)) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(X_k + Y_k) = \frac{k+2}{2}.$$

13. a. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique à la variable finie X_k :

$$\mathbb{P}(|X_k - \mathbb{E}(X_k)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X_k)}{\varepsilon^2},$$

ce qui donne par passage au complémentaire, d'après 12. et le résultat admis :

$$\mathbb{P}\left(\left|X_k - \frac{k+2}{2}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{k+2}{12\varepsilon^2}.$$

En appliquant cette inégalité à $\varepsilon = \alpha(k+2)$, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) \geq 1 - \frac{1}{12\alpha^2(k+2)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

d'où, par encadrement,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1.$$

b. Le résultat précédent signifie (en passant de nouveau au complémentaire si besoin) que la suite $\left(\frac{X_k}{k+2}\right)_k$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{2}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, la variable $\frac{X_k}{k+2}$ représente la proportion de boules blanches présentes dans l'urne avant le $k+1$ -ième tirage. Or plus il y a de boules blanches, et plus on aura tendance à rajouter une boule noire, et inversement, ce qui peut illustrer intuitivement la convergence précédente : on a tendance à se rapprocher d'une composition équilibrée au fil des tirages.

Quatrième partie

14. a. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(\lambda P + Q) &= j(\lambda P(X+1) + Q(X+1)) - i(\lambda P(X) + Q(X)) \\ &= \lambda(jP(X+1) - iP(X)) + (jQ(X+1) - iQ(X)) = \lambda\varphi_{i,j}(P) + \varphi_{i,j}(Q), \end{aligned}$$

ce qui établit la linéarité de $\varphi_{i,j}$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_{i,j}(X^k) = j(X+1)^k - iX^k = j \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} X^\ell - iX^k = (j-i)X^k + \sum_{\ell < k} j \binom{k}{\ell} X^\ell$$

est de degré k car $j \neq i$ par hypothèse. Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré d , on a alors

$$\varphi_{i,j}(P) = \sum_{k=0}^d a_k \varphi_{i,j}(X^k) = a_d \varphi_{i,j}(X^d) + \sum_{k < d} a_k \varphi_{i,j}(X^k)$$

où le premier terme est de degré d car $a_d \neq 0$ en tant que coefficient dominant du polynôme P de degré d , alors que les suivants sont de degrés strictement inférieurs à d . Le polynôme $\varphi_{i,j}(P)$ est donc de degré d .

c. D'après la question b., $P \neq 0$ implique $\varphi_{i,j}(P) \neq 0$. En d'autres termes, $\text{Ker } \varphi_{i,j} = \{0\}$ et l'application linéaire $\varphi_{i,j}$ est donc injective.

d. Le résultat étant évident pour $P = 0$, il suffit de considérer un polynôme P non nul, dont on note n le degré. D'après les questions b. et c., l'application linéaire $\varphi_{i,j}$ induit sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie un endomorphisme injectif, qui est automatiquement surjectif. Puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \varphi_{i,j}(Q)$.

15. a. Il suffit de vérifier que $\varphi_{2,1}(-X-2) = X+1 = (X+1)P_{1,1}$. On a alors $P_{2,2} = -P_{2,1}(0) = 2$.

b. Il suffit de vérifier que $\varphi_{3,2}(-2X-4) = 2X = XP_{2,2}$.

16. a. Pour $i = 1$, la somme au membre de droite se réduit au seul terme $P_{1,1} \binom{k}{1} = 1$ et \mathcal{H}_1 n'est donc qu'une reformulation de 7.a..

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a d'après **5.** et \mathcal{H}_{i-1} :

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= (k+1)! \left(i \mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i) \mathbb{P}(X_k = i-1) \right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1) j^{k+1} \\ &= i(k+1)! \mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i) \sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k) j^k - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1) j^{k+1} \\ &= i\alpha_k + \sum_{j=1}^{i-1} \left((3+k-i) P_{i-1,j}(k) - j P_{i,j}(k+1) + i P_{i,j}(k) \right) j^k = i\alpha_k\end{aligned}$$

car, par définition,

$$\forall j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, \quad j P_{i,j}(k+1) - i P_{i,j}(k) = \varphi_{i,j}(P_{i,j})(k) = (3+k-i) P_{i-1,j}(k).$$

La suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est ainsi géométrique de raison i :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)! \mathbb{P}(X_k = i) = i^k \alpha_0 + \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k = \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k$$

car $\alpha_0 = - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0) = P_{i,i}(0)$ par définition, d'où le résultat.

c. Il ne reste qu'à invoquer le principe de récurrence : l'initialisation a été établie en **a.** et l'hérédité en **b.**

17. a. Il vient d'après **15.a.** et **16.** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{1}{(k+1)!} (P_{2,2}(k) 2^k + P_{2,1}(k)) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

b. D'après **15.b.** et **16.**,

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 3) &= \frac{1}{(k+1)!} (P_{3,3}(k) 3^k + P_{3,2}(k) 2^k + P_{3,1}(k)) \\ &= \frac{3^{k+1} - (k+2) 2^{k+1} + \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{2} k + 1}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

