MATHS II 2018

Éléments de correction

Première partie

1. a. La série $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est télescopique convergente car la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, avec :

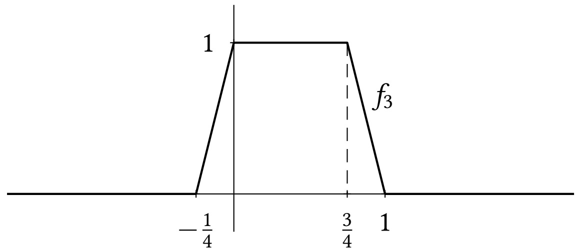
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

b. La question **a.** relève de la problématique étudiée dans cette partie si l'on considère la variable X constante égale à 1.

2. a. Le calcul donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{n+1}}^{0} \big(1+(n+1)t\big)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{n}{n+1}} c_n\,\mathrm{d}t + $$
$$+ \int_{\frac{n}{n+1}}^{1} (n+1)(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}c_n.$$

Puisque f_n est une densité par hypothèse, on a par ailleurs $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$, si bien que $c_n = 1$. La fonction f_3 est représentée ci-dessous.



b. Par théorème, la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Le calcul donne alors $\mathrm{F}_n(x) = 0$ pour $x \leqslant -\frac{1}{n+1}$, puis successivement :

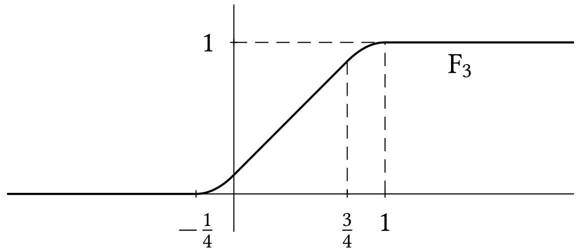
$$\forall x \in \left[-\frac{1}{n+1}, 0\right], \quad \mathrm{F}_n(x) = \int_{-\frac{1}{n+1}}^{x} \big(1+(n+1)t\big)\,\mathrm{d}t = \frac{\big(1+(n+1)x\big)^2}{2(n+1)},$$
$$\forall x \in \left[0, \frac{n}{n+1}\right], \quad \mathrm{F}_n(x) = \mathrm{F}_n(0) + \int_0^x \mathrm{d}t = x + \frac{1}{2(n+1)},$$
$$\forall x \in \left[\frac{n}{n+1}, 1\right], \quad \mathrm{F}_n(x) = \mathrm{F}_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) + \int_{\frac{n}{n+1}}^{x} (n+1)(1-t)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{n+1}{2}(1-x)^2$$

et enfin

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \mathrm{F}_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

De la formule (1) où f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (même en $-\frac{1}{n+1}$, 0, $\frac{n}{n+1}$ et 1), on déduit que F_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ci-dessous la représentation graphique de la fonction F_3 (non demandée) :



c. Il s'agit d'étudier, pour $x \in \mathbb{R}$ donné, la convergence et la limite de $F_n(x)$ lorsque $n \to \infty$, sachant qu'elles ne dépendent pas des premiers termes. Or

- pour $x < 0$ et $n > -\frac{1}{x} - 1$ i.e. $x < -\frac{1}{n+1}$, $F_n(x) = 0$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$;
- pour $0 \leqslant x < 1$ et $n > \frac{1}{1-x} - 1$ i.e. $x < \frac{n}{n+1}$, $F_n(x) = x + \frac{1}{2(n+1)}$ converge vers x lorsque $n \to \infty$;
- pour $x \geqslant 1$, $F_n(x) = 1$ converge vers 1 lorsque $n \to \infty$.

En conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases} = F_Y(x)$$

pour une variable Y de loi uniforme sur $[0,1]$. Ceci établit la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Y.

3. a. Comme X_{n+1} a même loi que X, à densité, il vient pour $\varepsilon > 0$ donné :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{X_{n+1}}{n+1}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) &= \mathbb{P}\big(|X| \geqslant (n+1)\varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(X \geqslant (n+1)\varepsilon\big) + \mathbb{P}\big(X \leqslant -(n+1)\varepsilon\big) \\ &= 1 - F_X\big((n+1)\varepsilon\big) + F_X\big(-(n+1)\varepsilon\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

ce qui établit la convergence en probabilité de la suite $\big(\frac{X_{n+1}}{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (et de la suite opposée) vers la variable nulle.

b. Vu la convergence en probabilité vers une constante établie en **a.** et compte-tenu de la convergence en loi évidente de la suite constante égale à X_1 vers X puisque les deux variables ont même loi, le lemme de Slutsky assure la convergence en loi de $D_n = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}$ vers X.

c. Les variables X_1 et $-\frac{X_{n+1}}{n+1}$ étant indépendantes par hypothèse et à densité, celle de X_1 étant bornée par hypothèse, leur somme D_n est également à densité donnée par le produit de convolution

$$f_{D_n} = f \star g_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_n(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

où g_n désigne une densité de $-\frac{X_{n+1}}{n+1}$, par exemple $g_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto (n+1)f\big(-(n+1)x\big)$. La formule précédente devient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{D_n}(x) = (n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f\big((n+1)(t-x)\big)\,\mathrm{d}t.$$

d. En supposant que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, elle admet pour densité

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour mener le calcul du produit de convolution $f \star g_n(x)$, on détermine alors l'intervalle d'intégration utile : pour $x, t \in \mathbb{R}$,

$$f(t)g(x-t) \neq 0 \iff \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant (n+1)(t-x) \leqslant 1 \end{cases} \iff t \in [0,1] \cap \Big[x, x + \frac{1}{n+1}\Big].$$

Comme $\frac{1}{n+1} \leqslant 1$, on distingue alors les cas suivants :

- si $x \leqslant 0 \leqslant x + \frac{1}{n+1}$ $(\leqslant 1)$ i.e. $-\frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant 0$,
$$f_{D_n}(x) = (n+1)\int_0^{x+\frac{1}{n+1}} \mathrm{d}t = 1 + (n+1)x\,;$$
- si $0 \leqslant x \leqslant x + \frac{1}{n+1} \leqslant 1$ c'est-à-dire si $0 \leqslant x \leqslant \frac{n}{n+1}$,
$$f_{D_n}(x) = (n+1)\int_x^{x+\frac{1}{n+1}} \mathrm{d}t = 1\,;$$
- si $(0 \leqslant)$ $x \leqslant 1 \leqslant x + \frac{1}{n+1}$ c'est-à-dire si $\frac{n}{n+1} \leqslant x \leqslant 1$,
$$f_{D_n}(x) = (n+1)\int_x^1 \mathrm{d}t = (n+1)(1-x)\,;$$
- dans les autres cas, le domaine d'intégration est vide et $f_{D_n}(x) = 0$.

Il en ressort que la variable Y_n a même loi que D_n. D'après la question **b.**, la suite (Y_n) converge donc en loi vers la variable X de loi uniforme sur $[0,1]$, donc également vers Y, ce qui constitue le résultat établi en **2.c.**.

4. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variables $\frac{X_n}{n}$ et $-\frac{X_{n+1}}{n+1}$, de lois respectives $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n^2})$ et $\mathcal{N}(0, \frac{1}{(n+1)^2})$, sont indépendantes. Par stabilité, leur somme $U_n = \frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1}$ suit donc la loi $\mathcal{N}\big(0, \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\big)$.

b. Par télescopage,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{X_k}{k} - \frac{X_{k+1}}{k+1}\Big) = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1} = D_n$$

converge en loi vers X d'après **3.b.** car une densité gaussienne est bornée. Ceci établit la convergence en loi de la série $\sum U_n$.

c. (i) D'après **a.** et compte-tenu de l'indépendance des variables $U'_1, \dots, U'_n$, le théorème de stabilité garantit que la somme $T'_n = \sum_{k=1}^{n} U'_k$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, où

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\Big) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 1 = \sigma^2.$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(T'_n \leqslant x) = \mathbb{P}\Big(\frac{T'_n}{\sigma_n} \leqslant \frac{x}{\sigma_n}\Big) = \Phi\Big(\frac{x}{\sigma_n}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\Big(\frac{x}{\sigma}\Big) = \mathbb{P}(T' \leqslant x)$$

si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, continue sur $\mathbb{R}$, et T' une variable de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ainsi la suite (T'_n) converge-t-elle en loi vers la variable T', de loi $\mathcal{N}\big(0, \frac{\pi^2}{3} - 1\big)$.

(ii) Les variables composant la suite (U'_n) sont indépendantes par hypothèse, ce qui n'est pas (a priori) le cas de celles de la suite (U_n). Les variables $T_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ et $T'_n = \sum_{k=1}^{n} U'_k$ n'ont donc pas (nécessairement) même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La convergence en loi obtenue en (i) de (T'_n) vers T', de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, n'est donc pas contradictoire avec la convergence en loi établie en **b.** de (T_n) vers X, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. A posteriori, ces deux résultats permettent de lever les réserves entre parenthèses du début de l'argument.

Il ressort de cette analyse que contrairement à ce qu'il en est pour la convergence en loi d'une suite, la convergence en loi d'une série de variables aléatoires ne dépend pas seulement de la loi de son terme général.

Deuxième partie

5. a. Il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n(\mathcal{D}) = \sum_{\substack{k\in\mathcal{D}:\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}^*:\\ 1\leqslant j^2\leqslant n}} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{j^2}.$$

b. On déduit immédiatement de **a.** la convergence de la suite $\big(h_n(\mathcal{D})\big)_n$, c'est-à-dire de la série $\sum_n \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n}$, avec :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

c. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si $m^{1/6} \in \mathbb{N}^*$, alors $m = \big((m^{1/6})^3\big)^2 = \big((m^{1/6})^2\big)^3 \in \mathcal{D} \cap \mathcal{T}$. Réciproquement, si $m \in \mathcal{D} \cap \mathcal{T}$, alors il existe $i, j \in \mathbb{N}^*$ tels que $m = i^2 = j^3$. On a alors $\sqrt{j} = \frac{i}{j} \in \mathbb{Q}$, si bien que $j \in \mathcal{D}$ d'après le résultat admis : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $j = k^2$ et donc $m = k^6$, ce qui met en évidence que $m^{1/6} = k \in \mathbb{N}^*$.

d. On montre comme en **a.** et **b.**, d'après **c.**, que :

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\mathcal{T}) = \zeta(3) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} h_n(\mathcal{D} \cap \mathcal{T}) = \zeta(6).$$

En remarquant que $\mathbb{1}_{\mathcal{D}\cup\mathcal{T}} = \mathbb{1}_{\mathcal{D}} + \mathbb{1}_{\mathcal{T}} - \mathbb{1}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{T}}$, on montre par ailleurs que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n(\mathcal{D} \cup \mathcal{T}) = h_n(\mathcal{D}) + h_n(\mathcal{T}) - h_n(\mathcal{D} \cap \mathcal{T}),$$

d'où l'on déduit finalement la convergence de la série $\sum_n \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}\cup\mathcal{T}}(n)}{n}$, avec :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}\cup\mathcal{T}}(n)}{n} = \zeta(2) + \zeta(3) - \zeta(6).$$

6. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\forall t \in [n, n+1], \quad \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2t-1} \leqslant \frac{1}{2n-1}$$
d'où :
$$\forall t \in [n, n+1], \quad 0 \leqslant \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} \leqslant \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$
et finalement :
$$0 \leqslant u_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1}\right) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \leqslant \frac{2}{(2n-1)^2}. \quad (2)$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient :
$$h_n(\mathcal{I}) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^* :\\ 1\leqslant 2k-1 \leqslant n}} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left(u_k + \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{2t-1}\right)$$
c'est-à-dire, par relation de Chasles et d'après la formule évidente $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \frac{\mathrm{d}t}{2t-1} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor} \frac{\mathrm{d}t}{2t-1}.$$

c. Par définition de la partie entière, on a déjà :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n+1}{2} \leqslant \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{n+3}{2}.$$
En écrivant que le graphe de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$, concave sur $]-1, +\infty[$, se situe en dessous de sa tangente à l'origine, on justifie par ailleurs l'inégalité classique $\ln(1+x) \leqslant x$, valable pour tout $x > -1$.
Il ressort de ces deux points que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \ln\left\{\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right\} \leqslant \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \leqslant \frac{2}{n}.$$

d. De l'équivalent $\frac{2}{(2n-1)^2} \sim \frac{1}{2n^2} \geqslant 0$, $n \to \infty$, on déduit la convergence de la série $\sum \frac{2}{(2n-1)^2}$ par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, puis celle de la série $\sum u_n$ d'après **a.**. En notant δ la somme de cette série, la formule obtenue en **b.** donne alors :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n} &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \frac{1}{2}\ln\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right) - \ln\sqrt{n} \\ &= \delta - \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}^{\infty} u_k + \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right\}\end{aligned} \quad (3)$$
Avec l'encadrement de la question **c.**, on en déduit que :
$$\lim_{n\to\infty} h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n} = \delta.$$

e. D'après (2),
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(k+1)-1}\right) = \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n-1} \quad (4)$$
par télescopage.

f. À partir de (3), il vient :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \delta - \left(h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n}\right) = \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}^{\infty} u_k - \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right\}$$
puis, d'après **c.** et (4),
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{1}{n} \leqslant \delta - \left(h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \leqslant \frac{1}{2\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) - 1} = \frac{1}{n-2}.$$

g. (i) Pour $\varepsilon = 0{,}2$, la condition $\frac{1}{n-2} > \varepsilon$ équivaut à $n < 7$. La variable s prendra donc les valeurs de $h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n}$ pour les entiers n impairs à partir de 3 et inférieurs à 7, c'est-à-dire pour $n = 3$ puis $n = 5$.

(ii) Il s'agit de faire passer le contenu de la variable s de $h_{n-2}(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n-2}$ à $h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n}$ pour n impair. En remarquant, toujours pour n impair, que :

$$\left(h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n}\right) - \left(h_{n-2}(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n-2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2}{n}\right),$$

on peut donc proposer :

```
s=s+1/n+log(1-2/n)/2;
```

(iii) D'après **f.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\delta - \left(h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n-2}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, la fonction renvoie donc $h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n}$ pour le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n-2} \leqslant \varepsilon$, qui constitue donc une valeur approchée de δ à la précision ε.

Troisième partie

7. a. (i) En convenant que $s_0 = 0$, il vient pour $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^\beta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{k^\beta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=2}^{n} \frac{s_{k-1}}{k^\beta}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{(k+1)^\beta} = \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k\left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right).$$

(ii) On a d'une part :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|\frac{s_n}{n^\beta}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n^{\beta-\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

car $\beta > \alpha$, d'où l'on déduit par encadrement que $\frac{s_n}{n^\beta}$ tend vers 0 lorqsue $n \to \infty$.
D'autre part,

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|s_n\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)\right| \leqslant \mathrm{M}n^\alpha\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right),$$

où

$$n^\alpha\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right) = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta - 1\right) \sim \frac{\beta}{n^{\beta-\alpha+1}} \geqslant 0, \quad n \to \infty$$

avec $\beta - \alpha + 1 > 1$, d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum n^\alpha\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)$ puis la convergence absolue et donc la convergence de la série $\sum s_n\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)$.
Ainsi tous les termes apparaissant au membre de droite de la formule établie en (i) admettent-ils une limite finie lorsque $n \to \infty$, ce qui signifie que la série $\sum \frac{x_n}{n^\beta}$ converge.

b. C'est une application directe du résultat démontré en **a.** avec $\beta = x > 0 = \alpha$ et $x_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sachant que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

vérifie $|s_n| \leqslant n^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. La variable finie $\mathbf{e}^{t\mathrm{S}_n}$ admet une espérance donnée, compte-tenu de l'indépendance de $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$, par :

$$\mathbb{E}(\mathbf{e}^{t\mathrm{S}_n}) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{t\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{t\mathrm{X}_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{e}^{t\mathrm{X}_k}) = \left(\frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}\right)^n.$$

b. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + (-1)^k\right)\frac{t^k}{k!} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ k \text{ pair}}} \frac{t^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!}$$

où, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(2j)! \geqslant (2j)(2j-2)\cdots 2 = 2^j j!$ si bien que :

$$\frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{2^j j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^j = \mathbf{e}^{t^2/2}.$$

c. En appliquant l'inégalité de Markov à la variable $\mathbf{e}^{tS_n}$, positive et admettant une espérance, il vient d'après **a.** et **b.** :

$$\mathbb{P}(S_n > s) \leqslant \mathbb{P}(\mathbf{e}^{tS_n} \geqslant \mathbf{e}^{ts}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathbf{e}^{tS_n})}{\mathbf{e}^{ts}} = \mathbf{e}^{-ts}\Big(\frac{\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{-t}}{2}\Big)^n \leqslant \mathbf{e}^{-ts}\big(\mathbf{e}^{t^2/2}\big)^n = \exp\Big(\frac{nt^2}{2} - ts\Big).$$

d. En appliquant le résultat de la question **c.** à la suite $(-X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(-S_n > s) \leqslant \exp\Big(\frac{nt^2}{2} - ts\Big).$$

Il en ressort que :

$$\mathbb{P}\big(\,|S_n| > s\big) = \mathbb{P}(S_n > s) + \mathbb{P}(-S_n > s) \leqslant 2\exp\Big(\frac{nt^2}{2} - ts\Big).$$

En écrivant en particulier cette inégalité pour le réel $t > 0$ minimisant le second membre, c'est-à-dire $t = \frac{s}{n}$, il vient :

$$\mathbb{P}\big(|S_n| > s\big) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{s^2}{2n}\Big).$$

9. a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, S_k est une variable aléatoire par opérations sur les variables aléatoires si bien que $[|S_k| > k^\alpha]$ est un événement, c'est-à-dire un élément de la tribu $\mathcal{A}$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'union dénombrable $\bigcup_{k\geqslant n}[|S_k| > k^\alpha]$ appartient également à $\mathcal{A}$, ainsi finalement que l'intersection dénombrable $\mathcal{C}_\alpha = \bigcap_{n\geqslant 1}\big(\bigcup_{k\geqslant n}[|S_k| > k^\alpha]\big)$.

b. D'après l'inégalité de la question **8.d.** appliquée à $s = n^\alpha > 0$, on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbb{P}\big(|S_n| > n^\alpha\big) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\Big) = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad n \to \infty$$

car $2\alpha - 1 > 0$. Il en ressort que la série $\sum \mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha)$ converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on justifie par récurrence sur p que :

$$\forall p \geqslant n, \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{p}\big[|S_k| > k^\alpha\big]\Big) \leqslant \sum_{k=n}^{p}\mathbb{P}\big(|S_k| > k^\alpha\big).$$

Par passage à la limite lorsque $p \to \infty$, on en déduit d'après le théorème de la limite monotone, la seconde inégalité ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathcal{C}_\alpha) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geqslant n}\big[|S_k| > k^\alpha\big]\Big) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}\big(|S_k| > k^\alpha\big).$$

Sachant que le membre de droite converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ comme reste d'une série convergente d'après **b.**, on obtient alors $\mathbb{P}(\mathcal{C}_\alpha) = 0$ par passage à la limite.

10. a. Étant donné $\omega \in \overline{\mathcal{C}_\alpha}$, il existe par définition un entier n tel que pour tout $k \geqslant n$, $|S_k(\omega)| \leqslant k^\alpha$. On se trouve alors en situation d'appliquer la question **7.a.** à la suite $\big(X_k(\omega)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ avec $\beta = 1 > \alpha$ et [1] $M = 1 + \max_{k<n}\frac{|S_k(\omega)|}{k^\alpha}$, d'où il ressort que la série $\sum_k \frac{X_k(\omega)}{k}$ converge i.e. que $\omega \in \mathcal{C}$. Ceci établit l'inclusion $\overline{\mathcal{C}_\alpha} \subset \mathcal{C}$.

b. En travaillant sur un réel $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, par exemple $\alpha = \frac{3}{4}$, les questions **a.** et **9.c.** garantissent que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \geqslant \mathbb{P}\big(\overline{\mathcal{C}_\alpha}\big) = 1$, d'où l'on déduit que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$.

c. Pour $\varepsilon > 0$ donné et $\omega \in \mathcal{C}$, on a convergence de $\big(K_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $K(\omega)$, de sorte qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $|K(\omega) - K_n(\omega)| \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie que $\omega \notin E(\varepsilon)$. On a donc l'inclusion [2] $\mathcal{C} \subset \overline{E(\omega)}$, d'où l'on déduit d'après **b.** que $\mathbb{P}\big(E(\varepsilon)\big) = 0$. Par décroissance de la suite d'événements $\big(\bigcup_{n\geqslant N}[|K - K_n| > \varepsilon]\big)_N$, on en déduit d'après le théorème de la limite monotone que :

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant N}\big[|K - K_n| > \varepsilon\big]\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{N\geqslant 1}\Big(\bigcup_{n\geqslant N}\big[|K - K_n| > \varepsilon\big]\Big)\Big) = \mathbb{P}\big(E(\varepsilon)\big) = 0.$$

1. Afin que l'inégalité $|S_k(\omega)| \leqslant Mk^\alpha$ soit valable à partir du rang $k = 1$ comme dans l'énoncé de la question **7.a.**, ce qui est en fait superflu.

2. Et, plus précisément, la relation

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{E(\varepsilon)}.$$

De l'inégalité
$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\big(|\mathrm{K}-\mathrm{K}_\mathrm{N}| > \varepsilon\big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \geqslant \mathrm{N}} \big[|\mathrm{K}-\mathrm{K}_n| > \varepsilon\big]\Big),$$
il ressort alors que
$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \mathbb{P}\big(|\mathrm{K}-\mathrm{K}_\mathrm{N}| > \varepsilon\big) = 0,$$
c'est-à-dire [3] que la suite $(\mathrm{K}_\mathrm{N})_\mathrm{N}$ converge en probabilité vers K.

11. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable H_n est finie donc admet espérance et variance. On a tout d'abord
$$\mathbb{E}(\mathrm{H}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\mathrm{B}_k)}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$
car la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente à termes positifs.
L'indépendance des variables $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$ amène ensuite :
$$\mathbb{V}(\mathrm{H}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{V}(\mathrm{B}_k)}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\zeta(2)}{4} = \frac{\pi^2}{24}.$$

b. Pour $r > 0$ donné, la question **a.** garantit que $\mathbb{E}(\mathrm{H}_n) > r$ pour n assez grand, et l'inégalité de Bianymé-Tchebychev donne alors :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{H}_n \leqslant r) = \mathbb{P}\big(\mathrm{H}_n - \mathbb{E}(\mathrm{H}_n) \leqslant r - \mathbb{E}(\mathrm{H}_n)\big) &\leqslant \mathbb{P}\big(|\mathrm{H}_n - \mathbb{E}(\mathrm{H}_n)| \geqslant \mathbb{E}(\mathrm{H}_n) - r\big)\\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{H}_n)}{\big(\mathbb{E}(\mathrm{H}_n) - r\big)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$
d'où l'on déduit par encadrement que $\mathbb{P}(\mathrm{H}_n \leqslant r)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.
Remarque. Cela met en évidence l'absence de convergence en loi de la série $\sum \frac{\mathrm{B}_n}{n}$.

c. (i) Il est sans doute préférable de reprendre le code dans son intégralité :

Listing 1 : simulations de $\mathrm{H}_n - h_n(\mathcal{I})$, version itérative

```
function y=simul(n,p)
   y=zeros(p,1);
   for i=1:p     // i-ième simulation de H_n-h_n(I)
      for k=1:n     // ajout du terme d'ordre k
         b=grand(1,1,'bin',1,.5);   // ou b=(rand()<.5);
         t=modulo(k,2);    // ou t=(1-(-1)^k)/2;
         y(i,1)=y(i,1)+(b-t)/k;
      end
   end
endfunction
```

Une version matricielle serait bien entendu plus efficace :

Listing 2 : simulations de $\mathrm{H}_n - h_n(\mathcal{I})$, version matricielle

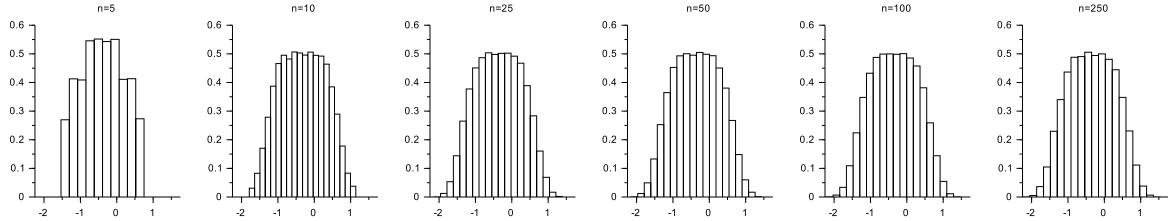
```
function y=simul(n,p)
   X=rand(p,n)<.5;    // p-échantillon de (B_1, ..., B_n)
   S=(ones(1,n)-(-1).^(1:n))/2;   // ligne des valeurs de 1_I(1:n)
   T=ones(p,1)*S;    // matrice dont chaque ligne est égale à S
   D=cumsum(ones(p,n),'c');   // matrice des dénominateurs
   y=sum((X-T)./D,'c');
endfunction
```

3. Le résultat étant en effet établi pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\big(|\mathrm{K}-\mathrm{K}_n| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \mathbb{P}\Big(|\mathrm{K}-\mathrm{K}_n| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
et par suite que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|\mathrm{K}-\mathrm{K}_n| \geqslant \varepsilon\big) = 0,$$
ce qui constitue la définition (telle qu'elle apparaît au programme de seconde année) de la convergence en probabilité de (K_n) vers K.

(ii) Le premier histogramme peut être obtenu avec les instructions suivantes :

```
p=10^3;  // nombre de simulations
n=50;
X=simul(n,p);
histplot(10,X);
```

(iii) Difficile de répondre à partir de trois histogrammes à seulement 10 classes, qui ne sont pas normalisés. En observant la forme des diagrammes mais aussi les valeurs en abscisses et en ordonnées, il semble néanmoins que pour n assez grand, la distribution de $\mathrm{H}_n - h_n(\mathcal{I})$ se stabilise autour d'une distribution limite, ce qui suggère un phénomène de convergence en loi pour la suite $\big(\mathrm{H}_n - h_n(\mathcal{I})\big)$.
Cela apparaît mieux sur les histogrammes ci-dessous :



12. **a.** Pour $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{B}'_k}{k} - h_n(\mathcal{I}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{X}_k}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big(\frac{1}{2} - \mathbb{1}_{\mathcal{I}}(k)\Big) = \frac{\mathrm{K}_n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

b. D'après le résultat admis suite à la question **10.c.**, la suite (K_n) converge en loi vers K, ce qui entraîne de manière évidente (sur la définition) la convergence en loi de $\left(\frac{\mathrm{K}_n}{2}\right)$ vers $\frac{\mathrm{K}}{2}$.
Par ailleurs, la question **7.b.** appliquée à $x = 1$ garantit la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. En notant $\mu = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (on a classiquement $\mu = -\frac{\ln 2}{2}$), on a donc convergence en probabilité de la suite de variables aléatoires certaines $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}\right)_n$ vers la constante μ.
D'après la question **a.** et le lemme de Slutsky, on a alors convergence en loi de la suite $\big(\mathrm{H}'_n - h_n(\mathcal{I})\big)$ vers $\lambda\mathrm{K} + \mu$, où $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{H}'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{B}'_k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Il ne reste plus qu'à remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n)$ et $(\mathrm{B}'_1, \ldots, \mathrm{B}'_n)$ sont deux n-échantillons indépendants et identiquement distribués de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$, si bien que H_n et H'_n ont même loi. Par suite, la convergence en loi de $\big(\mathrm{H}'_n - h_n(\mathcal{I})\big)$ établie plus tôt entraîne celle de $\big(\mathrm{H}_n - h_n(\mathcal{I})\big)$ vers $\lambda\mathrm{K} + \mu$.