HEC 2018

Éléments de correction

Préliminaire

1. a. Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, la fonction $t \longmapsto t^k \mathbf{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec $0 \leqslant t^k \mathbf{e}^{-t^2} = (t^2)^{k/2} \mathbf{e}^{-t^2} = o(\frac{1}{t^2} \geqslant 0)$ lorsque $t \to +\infty$, d'où la convergence de $\int_0^{+\infty} t^k \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

b. Le calcul donne :

$$\mathrm{A}_1 = \int_0^{+\infty} t\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{2}\mathbf{e}^{-t^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, en considérant une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}\big(0, \frac{1}{2}\big)$, de densité $f_{\mathrm{Z}} : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathbf{e}^{-t^2}$, il vient par parité de f_{Z} :

$$\mathrm{A}_0 = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} f_{\mathrm{Z}}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{Z}}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$\mathrm{A}_2 = \int_0^{+\infty} t^2\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{\mathrm{Z}}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathbb{E}(\mathrm{Z}^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathbb{V}(\mathrm{Z}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, les fonctions $t \longmapsto \mathbf{e}^{-t^2}\cos(2xt)$ et $t \longmapsto t\mathbf{e}^{-t^2}\sin(2xt)$ sont continue sur $[0, +\infty[$ avec, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\big|\mathbf{e}^{-t^2}\cos(2xt)\big| \leqslant \mathbf{e}^{-t^2} \quad \text{et} \quad \big|t\mathbf{e}^{-t^2}\sin(2xt)\big| \leqslant t\mathbf{e}^{-t^2},$$

si bien que les intégrales $\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t\mathbf{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument donc convergent par comparaison aux intégrales convergentes de la question **1.** pour $k = 0$ et $k = 1$.

Première partie

3. a. La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin' t| = |\cos t| \leqslant 1$. L'inégalité des accroissements finis garantit alors que $|\sin u| = |\sin u - \sin 0| \leqslant |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

b. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, l'identification des parties réelles dans la formule $\mathbf{e}^{\mathbf{i}(a\pm b)} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}a}\mathbf{e}^{\pm\mathbf{i}b}$ donne :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \end{cases},$$

d'où l'on déduit que

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a\sin b.$$

En appliquant, pour $u, v \in \mathbb{R}$, cette formule à a et b choisis tels que :

$$\begin{cases} a - b = u \\ a + b = v \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{v-u}{2} \end{cases},$$

il vient :

$$\cos u - \cos v = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v-u}{2}.$$

c. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x)| &= \Big|\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\big[\cos\big(2(x+h)t\big) - \cos(2xt)\big]\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \big|\cos\big(2(x+h)t\big) - \cos(2xt)\big|\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{+\infty} \big|\sin\big((2x+h)t\big)\sin(ht)\big|\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\,|h|\int_0^{+\infty} t\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

d'après **a.** et **b.**, toutes intégrales convergentes d'après **1.a.**. Puisque le majorant tend vers 0 lorsque $h \to 0$, on en déduit par encadrement que $\mathrm{F}(x+h) \to \mathrm{F}(x)$ lorsque $h \to 0$, c'est-à-dire que F est continue en x. Le résultat étant établi pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F est donc continue sur $\mathbb{R}$.

4. a. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 à la fonction sin, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $|\sin''(t)| \leqslant 1 = \mathrm{M}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il vient pour $u \in \mathbb{R}$ donné :

$$|\sin u - u| = \left|\sin u - \sum_{k=0}^{1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} u^k\right| \leqslant \frac{u^2}{2}\mathrm{M} = \frac{u^2}{2}.$$

b. Pour $x, h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) + 2h\mathrm{G}(x) &= \int_0^{+\infty} \big[\cos\big(2(x+h)t\big) - \cos(2xt) + 2ht\sin(2xt)\big]\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \big[\cos(2xt)\cos(2ht) - \sin(2xt)\sin(2ht) - \cos(2xt) + 2ht\sin(2xt)\big]\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \big[\big(2ht - \sin(2ht)\big)\sin(2xt) + \big(\cos(2ht) - 1\big)\cos(2xt)\big]\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

c. Pour $x, h \in \mathbb{R}$, il vient d'après **3.a.**, **a.** et **b.** :

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) + 2h\mathrm{G}(x)\big| &\leqslant \int_0^{+\infty} \big|\big(2ht - \sin(2ht)\big)\sin(2xt) - 2\sin^2(ht)\cos(2xt)\big|\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \big(\big|2ht - \sin(2ht)\big|\,|\sin(2xt)| + 2\sin^2(ht)\,|\cos(2xt)|\big)\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 4h^2 \int_0^{+\infty} t^2\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

toutes intégrales convergentes, d'où le résultat avec $\mathrm{C} = 4\mathrm{A}_2 = \sqrt{\pi}$.

5. a. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, il ressort de **4.c.** que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad \left|\frac{\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x)}{h} + 2\mathrm{G}(x)\right| \leqslant \mathrm{C}\,|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x)}{h} = -2\mathrm{G}(x),$$

si bien que F est dérivable en x, avec

$$\mathrm{F}'(x) = -2\mathrm{G}(x) = -2\int_0^{+\infty} t\mathbf{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,\mathrm{d}t.$$

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient par intégration par parties (en dérivant $t \longmapsto \sin(2xt)$ et en primitivant $t \longmapsto -2t\mathbf{e}^{-t^2}$), d'après **a.** :

$$\mathrm{F}'(x) = \lim_{y\to+\infty}\left(\big[\mathbf{e}^{-t^2}\sin(2xt)\big]_{t=0}^{t=y} - 2x\int_0^y \mathbf{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t\right) = -2x\mathrm{F}(x).$$

c. Il ressort de la question **b.** que la fonction $g : x \longmapsto \mathrm{F}(x)\mathbf{e}^{x^2}$ admet une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \big(\mathrm{F}'(x) + 2x\mathrm{F}(x)\big)\mathbf{e}^{x^2} = 0.$$

Elle est donc constante sur cet intervalle : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x)\mathbf{e}^{x^2} = k$. En évaluant en $x = 0$, on obtient la valeur de $k = \mathrm{F}(0) = \mathrm{A}_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après **1.b.**, si bien que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathbf{e}^{-x^2}.$$

Deuxième partie

6. a. La fonction φ_n est continue sur $\mathcal{D}$ par opérations sur les fonctions continues. Par ailleurs,

$$\varphi_n(u) = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})u\big)}{2\sin\frac{u}{2}} \sim \frac{(n+\frac{1}{2})u}{u} \to n + \frac{1}{2}, \quad u \to 0$$

et la fonction φ_n est donc prolongeable par continuité en 0.

b. La fonction φ_n étant manifestement 2π-périodique, on déduit du résultat obtenu en **a.** qu'elle admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.

c. La parité de φ_n est immédiate à partir de l'imparité de sin.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (les formules proposées ci-dessous ne sont pas valables pour $n = 0$, cas sans intérêt pour la suite).

a. Il vient classiquement, lorsque $\mathbf{e}^{\mathbf{i}u} \neq 1$ i.e. lorsque $u \in \mathcal{D}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}ku} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}u} \frac{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}nu}}{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}u}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}u} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}nu/2}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}u/2}} \frac{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}nu/2} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}nu/2}}{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}u/2} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}u/2}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)u/2} \frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}.$$

Lorsque $u \notin \mathcal{D}$, on a bien sûr $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}ku} = n$.

b. La relation est immédiate lorsque $u \notin \mathcal{D}$ d'après **6.**. Pour $u \in \mathcal{D}$, la question **a.** donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos ku = \Re\mathrm{e} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}ku} \right) = \frac{\cos \frac{(n+1)u}{2} \sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$$

c'est-à-dire, d'après la formule de trigonométrie $\cos a \sin b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) - \sin(a-b)\big)$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})u\big) - \sin \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}.$$

c. D'après **b.**,

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) \, \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku \Big) \, \mathrm{d}u = \pi + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \cos ku \, \mathrm{d}u = \pi.$$

8. Une première méthode peut consister à observer que la fonction $x \longmapsto \int_x^{x+\mathrm{T}} \psi(u) \, \mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \longmapsto \psi(x+\mathrm{T}) - \psi(x) = 0$. Elle est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, c'est-à-dire égale à sa valeur en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+\mathrm{T}} \psi(u) \, \mathrm{d}u = \int_0^{\mathrm{T}} \psi(u) \, \mathrm{d}u.$$

On peut également utiliser la relation de Chasles puis le changement de variable affine $u = v + \mathrm{T}$ dans la dernière intégrale : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\mathrm{T}} \psi(u) \, \mathrm{d}u &= \int_x^{0} \psi(u) \, \mathrm{d}u + \int_0^{\mathrm{T}} \psi(u) \, \mathrm{d}u + \int_{\mathrm{T}}^{x+\mathrm{T}} \psi(u) \, \mathrm{d}u \\ &= \int_x^{0} \psi(u) \, \mathrm{d}u + \int_0^{\mathrm{T}} \psi(u) \, \mathrm{d}u + \int_0^{x} \psi(v+\mathrm{T}) \, \mathrm{d}v = \int_0^{\mathrm{T}} \psi(u) \, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Troisième partie

9. a. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$k^2 f(x + 2k\pi) = \exp\big(2 \ln |k| - \theta(x+2k\pi)^2\big) = \exp\big(-4\theta\pi^2 k^2 + o(k^2)\big) \to 0, \quad k \to \pm\infty,$$

si bien que $f(x \pm 2k\pi) = o(\frac{1}{k^2})$ lorsque $k \to +\infty$, ce qui garantit la convergence des séries $\sum_{k\geqslant 1} f(x \pm 2k\pi)$ par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$.

Remarque. Puisque la convergence est absolue, on peut noter

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{H}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x + 2k\pi)$$

et il apparaît immédiatement sur cette expression que H est 2π-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{H}(x+2\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\big(x + 2(k+1)\pi\big) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x + 2j\pi) = \mathrm{H}(x)$$

par décalage d'indice $j = k+1$.

b. D'après la parité évidente de la fonction f, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{H}(-x) &= f(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(-x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} f(-x - 2k\pi) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x - 2k\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x + 2k\pi) = \mathrm{H}(x). \end{aligned}$$

En dérivant la relation ci-dessus, on obtient $-\mathrm{H}'(-x) = \mathrm{H}'(x)$. Ainsi la fonction H est-elle paire et sa dérivée H' impaire.

10. a. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Par changement de variable affine puis relation de Chasles,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{H_N}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \int_0^{2\pi} f(x+2k\pi)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u)\cos(nu-2kn\pi)\,\mathrm{d}u$$
$$= \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u = \int_{-2\mathrm{N}\pi}^{2(\mathrm{N}+1)\pi} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u.$$

b. On établit comme en **1.a.** et **2.** la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u$, si bien d'après **a.** et vu la parité de f que :

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{H_N}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u.$$

c. L'inégalité énoncée est fausse à plus d'un titre : déjà[1] pour $x = 2\pi$ et $\mathrm{N} = 0$ (adapter l'argument pour $\mathrm{N} = 1$ ou même $\mathrm{N} \geqslant 1$ quelconque si l'on veut se trouver précisément dans les conditions de l'énoncé), mais il existe un argument plus profond[2] expliquant l'impossibilité d'avoir une telle majoration (indépendante de x) valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Il suffit pour la suite d'établir un résultat plus faible :

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 2\pi], \quad |\mathrm{H}(x) - \mathrm{H_N}(x)| \leqslant 2\sum_{k=\mathrm{N}}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(2k\pi)^2}.$$

En effet, étant donnés $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 2\pi]$, on a $x + 2k\pi \geqslant 2k\pi \geqslant 0$ et $x - 2k\pi \leqslant -2(k-1)\pi \leqslant 0$ pour tout $k \geqslant \mathrm{N}+1$ si bien, d'après les variations de la fonction carré, que :

$$|\mathrm{H}(x) - \mathrm{H_N}(x)| = \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(x-2k\pi)^2}$$
$$\leqslant \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(2k\pi)^2} + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(2(k-1)\pi)^2} \leqslant 2\sum_{k=\mathrm{N}}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(2k\pi)^2}.$$

d. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on a d'après **c.** corrigé :

$$\left|\int_0^{2\pi} \mathrm{H}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} \mathrm{H_N}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{2\pi} \big(\mathrm{H}(x) - \mathrm{H_N}(x)\big)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \int_0^{2\pi} |\mathrm{H}(x) - \mathrm{H_N}(x)|\,|\cos(nx)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\sum_{k=\mathrm{N}}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(2k\pi)^2} \int_0^{2\pi} |\cos(nx)|\,\mathrm{d}x.$$

Puisque le membre de droite tend vers 0 lorsque $\mathrm{N} \to \infty$ comme reste d'une série convergente d'après **9.a.**, il en ressort par encadrement que :

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{H_N}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{H}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Par unicité de la limite, changement de variable affine $t = \sqrt{\theta}u$ et d'après **5.c.** et **b.**, on a alors finalement :

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{H}(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\theta u^2}\cos(nu)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\theta}}\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\cos\Big(\frac{n}{\sqrt{\theta}}t\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\theta}}\mathrm{F}\Big(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\exp\Big(-\frac{n^2}{4\theta}\Big).$$

1. En effet,

$$|\mathrm{H}(2\pi) - \mathrm{H_0}(2\pi)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} f(2\pi + 2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} f(2k\pi) > \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} f(2k\pi) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(2k\pi)^2}$$

car $f(0) = 1 > \mathbf{e}^{-\theta(2\pi)^2} = f(2\pi)$.

2. Hors-programme : la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, ni même son terme général vers 0...

11. a. Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, il vient d'après **7.b.** :

$$\begin{aligned} a_0 + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n \cos(nx) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{H}(u)\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \cos(nu)\cos(nx)\Big)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{H}(u)\Big(1 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \big[\cos\big(n(u+x)\big) + \cos\big(n(u-x)\big)\big]\Big)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{H}(u)\big(\varphi_{\mathrm{N}}(u+x) + \varphi_{\mathrm{N}}(u-x)\big)\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

b. On a d'après les questions **a.** et **8.**, compte-tenu de la 2π-périodicité de H et φ_{N} :

$$\begin{aligned} a_0 + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n \cos(nx) &= \int_x^{x+2\pi} \mathrm{H}(v-x)\varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v + \int_{-x}^{-x+2\pi} \mathrm{H}(v+x)\varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{H}(v-x)\varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v + \int_0^{2\pi} \mathrm{H}(v+x)\varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{H}(v+x)+\mathrm{H}(v-x)}{2\sin\frac{v}{2}} \sin\Big(\Big(\mathrm{N}+\frac{1}{2}\Big)v\Big)\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

c. La continuité (admise) de H sur $\mathbb{R}$ entraîne celle de K_x sur $]0,2\pi[$. La dérivabilité (elle aussi admise) de H en x garantit par ailleurs que :

$$\mathrm{H}(x+v) = \mathrm{H}(x) + \mathrm{H}'(x)v + o(v), \quad v \to 0$$

et, par parité de H,

$$\mathrm{H}(v-x) = \mathrm{H}(x-v) = \mathrm{H}(x) - \mathrm{H}'(x)v + o(v), \quad v \to 0$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{K}_x(v) = \frac{\mathrm{H}(v+x)+\mathrm{H}(v-x)-2\mathrm{H}(x)}{2\sin\frac{v}{2}} = \frac{o(v)}{v+o(v)} = \frac{o(1)}{1+o(1)} \to 0, \quad v \to 0$$

si bien que K_x est continue en 0. Enfin, en remarquant que :

$$\begin{aligned} \forall v \in\,]0,2\pi[, \quad \mathrm{K}_x(2\pi - v) &= \frac{\mathrm{H}(2\pi - v + x) + \mathrm{H}(2\pi - v - x) - 2\mathrm{H}(x)}{2\sin(\pi - \frac{v}{2})} \\ &= \frac{\mathrm{H}(v-x)+\mathrm{H}(v+x)-2\mathrm{H}(x)}{2\sin\frac{v}{2}} = \mathrm{K}_x(v) \end{aligned}$$

par parité et 2π-périodicité de H, on en déduit que K_x est également continue en 2π.

d. En s'appuyant sur les questions **7.c.** et **b.**, on obtient pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} a_0 + 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n \cos(nx) - 2\pi\mathrm{H}(x) &= \int_0^{2\pi} \big(\mathrm{H}(v+x)+\mathrm{H}(v-x)\big)\varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v - 2\mathrm{H}(x)\int_0^{2\pi} \varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{2\pi} \big(\mathrm{H}(v+x)+\mathrm{H}(v-x)-2\mathrm{H}(x)\big)\varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{K}_x(v)\sin\Big(\Big(\mathrm{N}+\frac{1}{2}\Big)v\Big)\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

12. a. Pour $\lambda > 0$, il vient par intégration par parties :

$$\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{-1}{\lambda} g(t)\cos(\lambda t)\Big]_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 g'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \Big|\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\Big| &\leqslant \frac{1}{\lambda}\big|g(0) - g(1)\cos\lambda\big| + \frac{1}{\lambda}\Big|\int_0^1 g'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\Big(|g(0)| + |g(1)| + \int_0^1 |g'(t)|\,\mathrm{d}t\Big) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

et, par encadrement,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

b. En appliquant le résultat de la question **a.** à la fonction K_x, continue sur $[0, 2\pi]$ d'après **11.c.**, on obtient d'après **11.d.** :

$$\lim_{N\to\infty}\Big(a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx)\Big) = 2\pi H(x).$$

Or, en utilisant l'expression des coefficients a_n établie en **10.d.**, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{N} \exp\Big(-\frac{n^2}{4\theta}\Big)\cos(nx)\Big),$$

d'où l'on déduit le résultat :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{n^2}{4\theta}\Big)\cos(nx)\Big) = H(x) = \mathbf{e}^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{e}^{-\theta(x-2k\pi)^2}.$$

Quatrième partie

13. a. On peut compléter le code comme indiqué (cf. questions **b.** et **c.** pour l'interprétation des variables) :

Listing 1 : simulation du jeu

```
1 function v=jeu(p)
2    i=1; v=1; s=1; j=1;
3    while (rand()>p)    // le lancer renvoie face
4       i=i+1; j=j+1;    // on prépare le lancer suivant
5       if (j>s) then v=-v; s=s+2; j=1; end   // changement de main
6    end
7    if (v==1) then disp('A vainqueur'); else disp('B vainqueur'); end
8 endfunction
```

Remarque. Curieuse fonction qui, en plus de renvoyer le résultat, l'affiche... On va s'en mordre les doigts en **e.** !

b. Après l'exécution de la fonction `jeu`, la variable `i` ne représente... rien : c'est une variable locale ! Trève de mauvais esprit : il s'agit du nombre de lancers effectués au cours du jeu.
Au cours de l'exécution de la fonction, la variable `i` représente le rang du lancer à venir. Quant à la variable `j`, elle représente le rang du prochain lancer depuis le dernier changement de main. De son côté, la variable `s` représente le nombre maximal de lancers entre le dernier changement de main et le suivant.

c. À chaque étape de l'exécution de la fonction `jeu`, la variable `v` désigne le joueur qui se prépare à lancer la pièce : elle vaut `1` lorsqu'il s'agit de A et `-1` lorsqu'il s'agit de B.

d. Il suffit d'utiliser une variable `k` que l'on initialise par `k=1;` en ligne 2 et que l'on incrémente entre les lignes 5 et 6 par l'instruction

```
if (v==1) then k=k+1; end
```

e. En s'appuyant sur la méthode de Monte-Carlo d'approximation d'une probabilité, on peut proposer le script suivant.

Listing 2 : approximation de la probabilité de victoire de A

```
function y=approx_PVA(p)
   N=10^4;  // nombre d'expériences dans la MMC
   y=0;
   for n=1:N
      if (jeu(p)==1) then y=y+1; end
   end
   y=y/N;
endfunction
```

Remarque. Le nombre N peut être ajusté en fonction de la précision dans l'approximation de la probabilité et du niveau de confiance $1-\alpha$ souhaités.

Dans toute la suite, on notera $\mathbb{P}$ plutôt que $\mathbb{P}_p$ pour ne pas alourdir inutilement les notations.

14. a. Classiquement, on finit presque sûrement par obtenir un pile au cours des lancers successifs, ce qui signifie que $\mathbb{P}(\mathrm{H} \cup \mathrm{K}) = 1$.
Le fait que la suite de lancers soit tronquée complique légèrement la situation. En notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'événement « on effectue au moins n lancers et le n-ième lancer renvoie face », on a par limite monotone :

$$\mathbb{P}\big(\overline{\mathrm{H} \cup \mathrm{K}}\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{F}_n\Big) = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_n\Big)$$

où, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités composées [3] donne :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_n\Big) = \mathbb{P}(\mathrm{F}_1)\, \mathbb{P}_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{F}_2)\, \mathbb{P}_{\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2}(\mathrm{F}_3) \cdots \mathbb{P}_{\mathrm{F}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{F}_{\mathrm{N}-1}}(\mathrm{F}_\mathrm{N}) = p^{\mathrm{N}}.$$

Il en ressort, sachant $0 < p < 1$, que $\mathbb{P}(\mathrm{H} \cup \mathrm{K}) = 1$.
La variable $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ donne alors le temps d'attente du premier succès (apparition de pile) lors d'une suite (tronquée après le premier succès) d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Classiquement (adapter le raisonnement standard comme ci-dessus), elle suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

b. De l'inclusion évidente $[\mathrm{X} = 1] \subset \mathrm{H}$, on déduit que $p \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{H}) \leqslant 1$, si bien que $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ converge vers 1 lorsque $p \to 1$ par encadrement.

15. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit c_n le rang du premier lancer après le n-ième changement de main dans l'éventualité improbable où le côté face sortirait à chaque lancer, en convenant que $c_0 = 1$. La n-ième série de lancers (i.e. celle délimitée par les $n-1$-ième et n-ième changements de main) est alors constituée des $2n - 1$ lancers correspondant aux rangs c_{n-1} à $c_n - 1$ si bien que $c_n = c_{n-1} + 2n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On démontre alors par une récurrence aisée que $c_n = n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De retour au cas général, le joueur A n'est susceptible de gagner qu'après un nombre pair de changements de main, de sorte que l'ensemble I des rangs de victoire possible du joueur A est donné par :

$$\mathrm{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![c_{2n}, c_{2n+1} - 1]\!] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1]\!].$$

b. D'après **a.**, sachant que le rang de victoire du gagnant est donné par $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{H}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} \in \mathrm{I}) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big[\mathrm{X} + \mathrm{Y} \in [\![4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1]\!]\big]\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(\mathrm{X} + \mathrm{Y} \in [\![4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1]\!]\big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(\mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} \leqslant 4n^2 + 4n + 1) - \mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} < 4n^2 + 1)\big)\end{aligned}$$

car l'union est disjointe. En notant

$$\mathrm{F}_p : n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \mathbb{P}(\mathrm{T} \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{T} = k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p = 1 - (1-p)^n$$

la (restriction à $\mathbb{N}^*$) de la fonction de répartition d'une variable T de loi géométrique de paramètre p, on a donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\mathrm{F}_p(4n^2 + 4n + 1) - \mathrm{F}_p(4n^2)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \big((1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2 + 4n + 1}\big).$$

On monterait de même que :

$$\mathrm{J} = \bigcup_{n \geqslant 1} [\![c_{2n-1}, c_{2n} - 1]\!] = \bigcup_{n \geqslant 1} [\![4n^2 - 4n + 2, 4n^2]\!]$$

puis

$$\mathbb{P}(\mathrm{K}) = \sum_{n=1}^{\infty} \big((1-p)^{4n^2 - 4n + 1} - (1-p)^{4n^2}\big).$$

3. Les événements F_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas indépendants (la suite (F_n) est décroissante).

16. a. En appliquant la formule de la question **12.b.** avec $x = \pi$ et $\theta = -\frac{1}{4\ln(1-p)} > 0$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-p)^{n^2}\Big) = \mathrm{H}(x) \geqslant \mathbf{e}^{-\theta x^2} > 0,$$

si bien que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-p)^{n^2} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b. D'après les questions **15.b.** et **a.**, et compte-tenu de la convergence des deux séries au membre central ci-dessous (par comparaison à une série de Riemann ou une série géométrique),

$$\mathbb{P}(\mathrm{H}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}.$$

Le jeu est donc à l'avantage du joueur A, dont la probabilité de victoire est strictement supérieure à celle de B.