

EDHEC 2018 S
Sujet 2, épreuve annulée
Éléments de correction

Premier exercice

1. a. Pour $k \geq 2$, la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$, produit de fonctions décroissantes et positives, garantit que :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k \ln k} = \frac{1}{k \ln k}.$$

- b. Il ressort de la question a. que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^n a_k &\geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} = \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} = \left[\frac{\ln(\ln t)}{2} \right]_2^{n+1} \\ &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$ est donc divergente, tout comme la série.

2. a. La fonction f est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ par opérations sur les fonctions continues. Elle est également continue en 0 car :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} \sim \frac{-x}{1 \cdot (-x)} = 1 \rightarrow 1 = f(0), \quad x \rightarrow 0, x \neq 0.$$

- b. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{-x - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x) \ln(1-x)} = \frac{-x - (1-x)(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(1-x) \ln(1-x)}, \quad x \rightarrow 0, x \neq 0 \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x(1-x) \ln(1-x)} \sim \frac{-\frac{x^2}{2}}{-x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

si bien que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \frac{1}{2}$.

3. a. La fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ par opérations sur les fonctions dérivables, avec :

$$\forall x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[, \quad f'(x) = -\frac{x + \ln(1-x)}{(1-x)^2 \ln^2(1-x)}.$$

- b. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ étant dérivable de dérivée décroissante sur l'intervalle $] -1, +\infty[$, elle y est concave. Son graphe se situe donc en-dessous de sa tangente à l'origine, ce qui signifie que $\ln(1+t) \leq t$ pour tout $t > -1$. En appliquant cette inégalité à $t = -x$, on en déduit que $\ln(1-x) + x \leq 0$ pour tout $x < 1$. La stricte concavité précise que l'égalité n'est réalisée que pour $x = 0$.

Avec a., on a en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$, d'où il ressort que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, 1[$. Comme elle est continue en 0, elle est finalement strictement croissante sur $] -\infty, 1[$.

- c. Par croissances comparées et opérations sur les limites, il apparaît que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 1$. Par ailleurs, $f(x) \sim \frac{1}{\ln(1-x)}$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow -\infty$.
On laisse le soin au lecteur de tracer le tableau de variations dans une situation aussi délicate...

4. a. Continue et strictement croissante sur $] -\infty, 1[$ d'après les questions 2. et 3., la fonction f réalise une bijection de $] -\infty, 1[$ sur $] \lim_{-\infty} f, \lim_1 f[=] 0, +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante sur $] 0, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \subset] 0, +\infty[$, l'équation $f(x) = n$ admet donc une unique solution $x \in] -\infty, 1[$: $u_n = f^{-1}(n) \geq f^{-1}(1) = 0 = u_1$.

- b. Par composition des limites, $u_n = f^{-1}(n)$ converge vers $\lim_{+\infty} f^{-1} = 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Remarque. On peut évidemment faire plus compliqué : observer que $(u_n)_n = (f^{-1}(n))_n$ est croissante et majorée donc convergente vers une limite ℓ , que l'on détermine ensuite en remarquant que si $\ell < 1$, on obtient une contradiction en passant à la limite dans $f(u_n) = n$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

c. Pour $n \geq 1$,

$$f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{n\sqrt{n} - 1}{\ln n\sqrt{n}} \sim n \cdot \frac{2\sqrt{n}}{3 \ln n}, \quad n \rightarrow \infty$$

si bien que

$$\frac{1}{n} f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \frac{2\sqrt{n}}{3 \ln n} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Il existe donc un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \geq n$ puis, par croissance de f^{-1} , $1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} \geq f^{-1}(n) = u_n$.

d. D'après c.,

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 > \ln(1 - u_n) \geq \ln \frac{1}{n\sqrt{n}} = -\frac{3}{2} \ln n$$

d'où, par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_- ,

$$\forall n \geq n_0, \quad -\frac{1}{n \ln(1 - u_n)} \geq \frac{2/3}{n \ln n} = \frac{2}{3} a_n \geq 0.$$

On en déduit alors la divergence de la série $\sum \frac{-1}{n \ln(1 - u_n)}$ par comparaison à la série $\sum a_n$, divergente d'après 1.b..

e. Par définition,

$$\forall n \geq 1, \quad n = f(u_n) = \frac{-u_n}{(1 - u_n) \ln(1 - u_n)}$$

d'où

$$\forall n \geq 1, \quad 1 - u_n = \frac{-u_n}{n \ln(1 - u_n)} \sim \frac{-1}{n \ln(1 - u_n)} \geq 0$$

car (u_n) converge vers 1 d'après b.. Il en ressort que la série $\sum (1 - u_n)$ diverge par comparaison à la série $\sum \frac{-1}{n \ln(1 - u_n)}$, divergente d'après d..



Deuxième exercice

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont finies et admettent donc une espérance.

1. a. Pour $i = j$, $X_i X_j = X_i^2 = 1$ car X_i est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, si bien que $\mathbb{E}(X_i X_j) = 1$. Pour $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes par hypothèse, si bien que $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) = 0$.
- b. Avec des notations abusives¹,

$$X = \left\| \sum_{k=1}^n X_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2 \|u_k\|^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} X_i X_j \langle u_i, u_j \rangle$$

d'où, sachant les vecteurs u_1, \dots, u_n unitaires et compte-tenu de la question a.,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{E}(X_i X_j) \langle u_i, u_j \rangle = n.$$

c. S'il n'existait aucun vecteur $x \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|w_x\| \leq \sqrt{n}$, alors on aurait

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \left\| \sum_{k=1}^n x_k u_k \right\|^2 > n,$$

si bien que la variable aléatoire $X - n$ ne prendrait que des valeurs strictement positives, tout en étant centrée d'après b., ce qui est absurde² : comme X est finie, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $X - n \geq \varepsilon$ et l'on aurait $\mathbb{E}(X - n) \geq \varepsilon > 0$.

Il en ressort l'existence d'un vecteur $x \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|w_x\| \leq \sqrt{n}$, et l'on montrerait de même l'existence d'un autre vecteur x pour lequel $\|w_x\| \geq \sqrt{n}$.

1. En toute rigueur, il faudrait plutôt écrire

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \left\| \sum_{k=1}^n X_k(\omega) u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)^2 \|u_k\|^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} X_i(\omega) X_j(\omega) \langle u_i, u_j \rangle.$$

2. On peut également invoquer une propriété du cours pour faire apparaître la contradiction : pour une variable Y positive admettant une espérance, on a $\mathbb{E}(Y) \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, Y est presque sûrement nulle.

2. a. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\mathbb{E}((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)) = \mathbb{E}[(Y_i - \mathbb{E}(Y_i))(Y_j - \mathbb{E}(Y_j))] = \text{cov}(Y_i, Y_j).$$

Or $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ lorsque $i \neq j$ puisque les variables Y_i et Y_j sont alors indépendantes, et $\text{cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{V}(Y_i)$ lorsque $i = j$. Ainsi,

$$\mathbb{E}((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)) = \begin{cases} p_i(1 - p_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b. Avec les mêmes notations abusives qu'en 1.b.,

$$Y = \left\| \sum_{k=1}^n (p_k - Y_k) v_k \right\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (p_i - Y_i)(p_j - Y_j) \langle v_i, v_j \rangle$$

d'où, d'après a.,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{E}((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)) \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k) \|v_k\|^2 \leq \frac{n}{4}$$

car pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\|v_k\| \leq 1$ par hypothèse, mais aussi $0 \leq p_k(1 - p_k) \leq \frac{1}{4}$ classiquement.

c. S'il n'existait aucun vecteur $x \in \{0, 1\}^n$ pour lequel $\|z - y_x\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$, la variable $Y - \frac{n}{4}$ serait à valeurs strictement positives. En raisonnant comme en 1.c., on peut alors mettre en évidence une contradiction avec le résultat de la question b. selon lequel $\mathbb{E}(Y - \frac{n}{4}) \leq 0$. C'est donc qu'il existe $x \in \{0, 1\}^n$ tel que $\|z - y_x\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$.



Troisième exercice

1. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$: elle est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ avec

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable finie X_n admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} x \mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k = \frac{n}{2}.$$

On obtient de même l'existence et la valeur de

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(2n+1)}{6}$$

d'où finalement celles de

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(n+2)}{12}.$$

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[Y = n] = [X_1 > 0] \cap \dots \cap [X_{n-1} > 0] \cap [X_n = 0]$.

b. Par indépendance des variables X_1, \dots, X_n , il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(X_n = 0) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k > 0) = \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

par télescopage.

c. On a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

par télescopage, l'existence de la limite finie garantissant la convergence de la série³.

Remarque. Ainsi l'éventualité que le mobile ne revienne jamais à l'origine est-elle de probabilité nulle, ce qui permet d'accepter la définition de Y comme variable aléatoire.

3. Que l'on savait déjà convergente car les événements $[Y = n]$, $n \geq 1$, sont deux-à-deux incompatibles.

- d.** La variable Y n'admet pas d'espérance car la série de terme général $n \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \geq 0$, $n \geq 1$, est divergente par comparaison à la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, divergente.
- 3. a.** Pour changer de la comparaison série-intégrale⁴, déjà utilisée dans le premier exercice, on peut plutôt s'appuyer sur l'inégalité des accroissements finis : pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné, la fonction \ln étant dérivable sur $[k, k + 1]$ avec

$$\forall t \in [k, k + 1], \quad \frac{1}{k + 1} \leq \ln' t = \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k},$$

elle garantit que

$$\frac{1}{k + 1} \leq \ln(k + 1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

- b.** Pour $j \geq 2$, on obtient en sommant les inégalités établies **a.** pour k variant entre 1 et $j - 1$, par télescopage et changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{j} = \sum_{k=2}^j \frac{1}{k} \leq \ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k},$$

d'où il ressort que :

$$\ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln j + 1 - \frac{1}{j}.$$

- c.** En divisant tous les membres de l'inégalité obtenue en **b.** par $\ln j > 0$, on obtient :

$$\forall j \geq 2, \quad 1 \leq \frac{1}{\ln j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{\ln j} - \frac{1}{j \ln j}$$

où les deux membres extrémaux convergent vers 1 lorsque $j \rightarrow \infty$. On en déduit par encadrement qu'il en va de même du membre central, ce qui signifie que :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \sim \ln j, \quad j \rightarrow \infty.$$

- 4. a.** Pour $i \geq j \geq 1$, les événements $[Y = i]$ et $[Z = j]$ sont incompatibles, si bien que $\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z = j) = 0$.
- b.** Soient $1 \leq i < j$ entiers. Conditionnellement à l'événement $[Y = i]$, on a $Z = j$ si, et seulement si, l'événement $[X_{i+1} > 0] \cap \dots \cap [X_{j-1} > 0] \cap [X_j = 0]$ se réalise. Puisque l'événement $[Y = i]$ appartient à la tribu $\mathcal{A}_{(X_1, \dots, X_i)}$ d'après **2.a.**, indépendante de la tribu $\mathcal{A}_{(X_{i+1}, \dots, X_j)}$ d'après le lemme des coalitions et l'indépendance des variables $X_1, \dots, X_i, \dots, X_j$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z = j) &= \mathbb{P}_{[Y=i]} \left([X_j = 0] \cap \bigcap_{k=i+1}^{j-1} [X_k > 0] \right) = \mathbb{P} \left([X_j = 0] \cap \bigcap_{k=i+1}^{j-1} [X_k > 0] \right) \\ &= \mathbb{P}(X_j = 0) \prod_{k=i+1}^{j-1} \mathbb{P}(X_k > 0) = \frac{1}{j+1} \prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{k}{k+1} = \frac{i+1}{j(j+1)}. \end{aligned}$$

- c.** D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable Y , il vient d'après **2.b.**, **a.** et **b.** :

$$\forall j \geq 2, \quad \mathbb{P}(Z = j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = i) \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij(j+1)} = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}$$

- d.** D'après les questions **3.c.** et **c.**,

$$j \mathbb{P}(Z = j) = \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} \sim \frac{\ln j}{j}, \quad j \rightarrow \infty,$$

4. Partant de

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(k + 1) - \ln k = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t},$$

on pourrait en effet justifier, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$, que :

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \ln(k + 1) - \ln k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}.$$

www.rb11d.fr

d'où il ressort que $0 \leq \frac{1}{j} = o(j \mathbb{P}(Z = j))$ lorsque $j \rightarrow \infty$, si bien que la série $\sum_j j \mathbb{P}(Z = j)$ diverge par comparaison à la série harmonique, divergente : la variable Z n'admet donc pas d'espérance.

Remarque. Ce résultat peut être justifié plus simplement à partir du théorème de domination : sachant que $0 \leq Y \leq Z$ où Y n'admet pas d'espérance d'après **2.d.**, la variable Z ne peut admettre d'espérance.

5. a. Script et question complètement artificiels, pour ne pas dire sans intérêt, mais il faut tout de même répondre :

```
n=input('Note à moi-même : entrer n...');
    // Très utile, ce input...
disp(grand(1,1,'uin',0,n));
```

simule le n -ième déplacement du mobile et affiche sa nouvelle position.

- b. Le script ci-dessous répond à la question.

Listing 1 : simulation et affichage des variables Y et Z

```
n=0; // compteur de déplacements
a=0; // compteur de retours à l'origine
while (a<2)
    n=n+1;
    if (grand(1,1,'uin',0,n)==0) then // retour à l'origine
        a=a+1;
        if (a==1) then y=n; end
    end
end
disp(y,'y=');
disp(n,'z=');
```

Problème

Première partie

1. a. Il vient immédiatement :

$$u_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad u_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 1.$$

- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$ donc $\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, si bien que $u_{n+1} \leq u_n$ par croissance de l'intégrale. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

- c. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos^n t$ positive, continue mais non identiquement nulle sur le segment non trivial $[0, \frac{\pi}{2}]$ y admet une intégrale strictement positive : $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt > 0$.

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, il vient par intégration par parties (en dérivant $t \mapsto \cos^{n+1} t$ et en primitivant $t \mapsto \cos t$) :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{n+1} t \, dt = [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt = (n+1)(u_n - u_{n+2}) \end{aligned}$$

de sorte que $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$. On obtient ainsi une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n. \quad (1)$$

- b.** On démontre le résultat par récurrence à partir de (1) : il est immédiat au rang $n = 0$ vu **1.a.** et, s'il est acquis à un rang $n \geq 0$, alors

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} u_{2n} = \frac{2n+2}{2(n+1)} \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2},$$

d'où le résultat.

- c.** Toujours d'après **a.**, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_{n+1}u_n,$$

si bien que la suite $((n+1)u_{n+1}u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}u_n = u_1u_0 = \frac{\pi}{2}.$$

- d.** D'après **b.** et **c.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)u_{2n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- 3. a.** D'après (1),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

- b.** D'après **1.b.** et **1.c.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{u_n}{u_n} = 1$$

d'où il ressort, par encadrement d'après **a.**, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

- c.** La question **b.** assure que $u_n \sim u_{n+1}$ si bien que $(n+1)u_n^2 \sim (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$ d'après **2.c.**, d'où finalement

$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

- 4.** N'en déplaise à l'auteur du sujet, on propose ci-dessous une fonction calculant u_n plutôt qu'un script à la mode grand-papa...

Listing 2 : calcul de u_n

```
function y=u(n)
    y=%pi/2;
    for k=1:n // exécuté seulement pour n>=1
        y=%pi/2/y/k;
    end
endfunction
```

Deuxième partie

- 5.** La fonction f est positive sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R} sauf peut-être en 0 et $\frac{\pi}{2}$, d'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1,$$

convergente puisque la primitive choisie admet des limites finies en 0 et 1. La fonction f est donc une densité de probabilité.

- 6.** Par théorème,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Puisque f est nulle en dehors de $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a déjà $F(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F(x) = 1$ pour $x > \frac{\pi}{2}$. Cela signifie que X est presque sûrement à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$F(x) = \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x.$$

En conclusion,

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \cos x & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases} .$$

7. a. La variable, presque sûrement bornée comme on l'a fait remarquer en 6., admet une espérance que l'on peut calculer par intégration par parties :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_0^{\pi/2} t \sin t dt = [-t \cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 1.$$

- b. On justifie de même l'existence et on calcule grâce à deux intégrations par parties successives la valeur de

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt = \pi - 2.$$

On en déduit l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \pi - 3$.

8. a. Pour $n \geq 2$ donné, il vient classiquement par indépendance de X_1, \dots, X_n :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n [X_k \leq x]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k > x]\right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > x) = 1 - (1 - F(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \cos^n x & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases} . \end{aligned}$$

- b. D'après la question a.,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = F_0(x),$$

où F_0 est la fonction de répartition de la variable aléatoire constante égale à 0. Bien que la convergence n'ait pas lieu pour $x = 0$, point de discontinuité de F_0 , cela suffit pour conclure que la suite (I_n) converge en loi vers 0.

- c. Pour $n \geq 2$ donné, la fonction F_n étant continue sur \mathbb{R} (même en 0 et $\frac{\pi}{2}$) et de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{\pi}{2}\}$, la variable I_n est à densité et admet par exemple pour densité

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} F'_n(x) & \text{si } x \notin \{0, \frac{\pi}{2}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} n \sin x \cos^{n-1} x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La variable I_n étant elle aussi presque sûrement bornée, elle admet un moment d'ordre 2 dont on peut retravailler l'expression par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_n^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt = n \int_0^{\pi/2} t^2 \sin t \cos^{n-1} t dt \\ &= [-t^2 \cos^n t]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} t \cos^n t dt = 2 \int_0^{\pi/2} t \cos^n t dt. \end{aligned}$$

- d. Il vient immédiatement d'après c. :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{E}(I_n^2) = 2 \int_0^{\pi/2} t \cos^n t dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \cos^n t dt = \pi u_n.$$

- e. D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable I_n^2 , positive et admettant une espérance, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(|I_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(I_n^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(I_n^2)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\pi}{\varepsilon^2} u_n.$$

Puisque le dernier majorant obtenu converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après 3.c., il en ressort par encadrement que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|I_n| \geq \varepsilon) = 0,$$

c'est-à-dire que (I_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

Remarque. Curieux choix de l'énoncé de faire intervenir I_n^2 sachant que I_n est presque sûrement à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors que d'une part le résultat est immédiat en revenant à la définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(|I_n| \geq \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(I_n < \varepsilon) = 1 - F_n(\varepsilon)$$

tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après **b.**, et d'autre part que si on tient vraiment à s'appuyer sur l'inégalité de Markov, il est plus simple de l'appliquer directement à la variable positive I_n , dont on montre comme en **c.** qu'elle admet pour espérance $\mathbb{E}(I_n) = u_n$. Le charme des sujets EDHEC, sans doute...

9. a. La fonction h étant continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, elle réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[h(\frac{\pi}{2}), h(0)] = [0, 1]$.

b. Puisque X est presque sûrement à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut poser $Y = h(X)$.

Comme h est à valeurs dans $[0, 1]$, on a tout d'abord $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$ pour $y < 0$ et $\mathbb{P}(Y \leq y) = 1$ pour $y > 1$. Pour $y \in [0, 1]$, la stricte décroissance de h garantit que :

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(h(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \geq h^{-1}(y)) = 1 - F(h^{-1}(y)) = y$$

d'après **6.**, sachant que X est à densité. La variable Y suit donc la loi uniforme sur $[0, 1]$.

c. Il suffit de simuler Y suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ puis d'appliquer la fonction h^{-1} pour simuler $X = h^{-1}(Y)$:

`Y=grand(1,1,'unf',0,1);`

`X=acos(Y);`

