EDHEC 2018 S

Sujet 1, épreuve annulée

Éléments de correction

Premier exercice

1. La fonction f est paire.

2. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mathbf{e}^{2t}}{(\mathbf{e}^{2t}+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\mathbf{e}^{2t}+1}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathbf{e}^{2x}+1} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathbf{e}^{2x}+1} = 1,$$

la convergence de l'intégrale étant assurée par l'existence des limites finies pour la primitive. Toutes les conditions sont donc réunies pour que f soit une densité de probabilité.

3. a. On a :

$$0 \leqslant xf(x) = \frac{2x}{(\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x})^2} = \frac{2x}{\big(\mathbf{e}^x+o(\mathbf{e}^x)\big)^2} \sim \frac{2x}{\mathbf{e}^{2x}} = 2x\mathbf{e}^{-2x} = o\Big(\frac{1}{x^2}\Big), \quad x\to+\infty,$$

si bien que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
La fonction $t \longmapsto tf(t)$ étant impaire d'après la question **1.**, on en déduit la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$, d'où l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$.

b. En raisonnant comme en **a.**, on prouve la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ pour en déduire celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ par parité, ce qui établit l'existence de $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$ et donc de $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

4. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points), de dérivée $\mathrm{F}' = f$ à valeurs strictement positives. Par suite, la fonction F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{-\infty} \mathrm{F}, \lim_{+\infty} \mathrm{F}[=]0,1[$.

5. a. Puisque F est à valeurs dans $]0,1[$, on a déjà $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant y) = 0$ pour $y \leqslant 0$ et $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant y) = 1$ pour $y \geqslant 1$.
Pour $y \in]0,1[$, la stricte croissance de F justifie que :

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant y) = \mathbb{P}\big(\mathrm{F}(\mathrm{X}) \leqslant y\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{F}^{-1}(y)\big) = \mathrm{F}\big(\mathrm{F}^{-1}(y)\big) = y.$$

Il en ressort que Y suit la loi uniforme sur $]0,1[$.
Remarque. Il s'agit d'un cas particulier d'application de la méthode d'inversion.

b. Il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{2\mathbf{e}^{2t}}{(\mathbf{e}^{2t}+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\mathbf{e}^{2t}+1}\right]_{-\infty}^{x} = 1 - \frac{1}{\mathbf{e}^{2x}+1}.$$

c. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} y = \mathrm{F}(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = 1 - \frac{1}{\mathbf{e}^{2x}+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{e}^{2x}+1 = \frac{1}{1-y} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1}{1-y} - 1\Big) = \frac{1}{2}\ln\frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

car on a successivement $1-y > 0$ puis $\frac{1}{1-y} > 1$. Il en ressort que :

$$\forall y \in]0,1[, \quad \mathrm{F}^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\frac{y}{1-y}.$$

d. Pour simuler la variable X, il suffit d'après **a.** de simuler Y suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ puis de lui appliquer F^{-1} :

Listing 1 : simulation de X

```
function X=simulX()
    Y=rand();
    X=ln(Y/(1-Y))/2;
endfunction
```

Deuxième exercice

1. Le calcul donne $A^2 - (a+d)A = -(ad-bc)I_2$.

2. a. En multipliant par A^{k-1} la relation obtenue en **1.**, il vient $-(ad-bc)A^{k-1} = A^{k+1} - (a+d)A^k = 0$ avec $A^{k-1} \neq 0$ par hypothèse, ce qui implique $ad - bc = 0$.
Remarque. On peut également montrer que $ad - bc \neq 0$ impliquerait A inversible, ce qui est incompatible avec l'hypothèse $A^k = 0$.

b. La matrice A étant non nulle par hypothèse, on a nécessairement $k \geqslant 2$.

c. En multipliant la relation de la question **1.** par A^{k-2}, compte-tenu de **a.** et **b.**, on obtient $0 = A^k = (a+d)A^{k-1}$ avec $A^{k-1} \neq 0$, d'où l'on déduit que $a + d = 0$.

3. Si A est nilpotente, alors elle vérifie $A^2 = 0$ d'après les questions **1.** et **2.**. La réciproque est évidente.

4. a. On suppose $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Pour $x \in E$, on a alors $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = 0$ car $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. L'endomorhpisme f^2 est donc nul.

b. Étant donné $y \in \operatorname{Im} f$ et $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on a $f(y) = f^2(x) = 0$ par hypothèse, si bien que $y \in \operatorname{Ker} f$. On met ainsi en évidence que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
On en déduit en particulier, d'après le théorème du rang, que $\operatorname{rg} f \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f) = 2 - \operatorname{rg} f$, i.e. que $\operatorname{rg} f \leqslant 1$. Comme par ailleurs $f \neq 0$ i.e. $\operatorname{rg} f \geqslant 1$ par hypothèse, on a donc $\operatorname{rg} f = 1$ ainsi que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. Ayant ainsi égalité des dimensions dans l'inclusion établie plus haut, on a finalement $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

c. La question **3.** appliquée à une matrice représentative de f garantit que f est nilpotent si, et seulement si, $f^2 = 0$. D'après les questions **a.** et **b.**, cela est encore équivalent à $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

5. D'après la question **4.**, on a $f^2 = 0$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.
Dans une base donnée (e_1, e_2) de E, l'endomorphisme f est représenté par la matrice A de l'énoncé si, et seulement si, $f(e_1) = 0$ et $f(e_2) = e_1$.
On choisit donc un vecteur e_1 non nul de $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Il existe alors $e_2 \in E$ tel que $e_1 = f(e_2)$. On vérifie alors que la famille (e_1, e_2) est libre : étant donnés λ_1 et λ_2 réels tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, on obtient d'abord $\lambda_2 e_1 = 0$ en composant par f, d'où il ressort que $\lambda_2 = 0$ puisque $e_1 \neq 0$, puis on justifie de même que $\lambda_1 = 0$ en revenant à la relation de départ. Libre et formée de $2 = \dim E$ vecteurs, il s'agit d'une base de E, dans laquelle f est représenté par la matrice A d'après l'analyse préliminaire.

6. a. Étant donné un vecteur $y \in \operatorname{Im} f$ et $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on a $y = u\big(v(x)\big) \in \operatorname{Im} u$, ce qui justifie l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} u$.
Pour $x \in E$ tel que $v(x) = 0$, on a $f(x) = u\big(v(x)\big) = 0$ si bien que $x \in \operatorname{Ker} f$, d'où la seconde inclusion $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} f$.

b. Les endomorphismes u et v étant nilpotents par hypothèse, tous deux non nuls sans quoi f serait nul, ce qui est exclu, on peut leur appliquer les résultats établis en **4.**. Il en ressort que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} v$ sont de dimension 1. On a ainsi égalité des dimensions dans les inclusions établies en **a.**, qui sont par suite des égalités : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} f$.

c. D'après l'analyse menée en **b.**, $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} v$.

d. Pour $x \in E$, $f(x) = u\big(v(x)\big) = 0$ car $v(x) \in \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$ d'après **c.**. L'endomorphisme f serait donc nul, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il n'existe donc aucun couple (u, v) d'endomorphismes nilpotents tels que $f = u \circ v$.

Troisième exercice

1. a. Les colonnes de J_n étant toutes égales et non nulles, elles engendrent une droite, si bien que $\operatorname{rg} J_n = 1$. Ainsi $\operatorname{rg} J_n < n$, ce qui signifie que J_n n'est pas inversible : 0 en est valeur propre et le sous-espace propre associé a pour dimension $\dim E_0(J_n) = n - \operatorname{rg} J_n = n - 1$ en vertu du théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à J_n.

b. On vérifie que $J_n V_n = n V_n$. Comme le vecteur V_n est non nul, il est donc vecteur propre de J_n pour la valeur propre n.

c. Les questions **a.** et **b.** ont mis en évidence les valeurs propres 0 et n de J_n, associées à des sous-espaces propres tels que $\dim E_0(J_n) = n-1$ et $\dim E_n(J_n) \geqslant 1$. Comme par ailleurs $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, J_n} \dim E_\lambda(J_n) \leqslant n$, on a ainsi trouvé toutes les valeurs propres de J_n : 0 et n.

2. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

3. a. Application immédiate des théorèmes opératoires, what else ?

b. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla f_n(x) = 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!], 1 - 2x_i \sum_{k=1}^n x_k = 0 \iff \begin{cases} \alpha = \sum_{k=1}^n x_k \neq 0 \\ \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \frac{1}{2\alpha} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha \neq 0, \alpha = \frac{n}{2\alpha} \\ \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \frac{1}{2\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 = \frac{n}{2} \\ \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \frac{1}{2\alpha} \end{cases}$$

car l'expression $\sum_{k=1}^n x_k$, même si elle dépend de $x_1, \ldots, x_n$, est symétrique par rapport à ces variables. La fonction f_n présente donc deux points critiques : $a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, \ldots, 1)$ et $b = -a$.

4. a. On obtient, pour $i \neq j \in [\![1, n]\!]$,

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \partial^2_{i,j} f_n(x) = \Big(-2x_i - 2x_j + 4x_i x_j \sum_{k=1}^n x_k\Big) \exp\Big(-\sum_{k=1}^n x_k^2\Big)$$

et, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \partial^2_{i} f_n(x) = \Big(-4x_i + 2(2x_i^2 - 1) \sum_{k=1}^n x_k\Big) \exp\Big(-\sum_{k=1}^n x_k^2\Big).$$

b. Au point a, les formules de la question **a.** deviennent (en notant $\delta_{\cdot,\cdot}$ le symbole de Kronecker) :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \partial^2_{i,j} f_n(a) = \begin{cases} \frac{-2}{\sqrt{2n\mathbf{e}}}(n+1) & \text{si } i = j \\ \frac{-2}{\sqrt{2n\mathbf{e}}} & \text{si } i \neq j \end{cases} = -\sqrt{\frac{2}{n\mathbf{e}}}(n\delta_{i,j} + 1)$$

d'où l'expression de la hessienne de f au point a :

$$\nabla^2 f_n(a) = -\sqrt{\frac{2}{n\mathbf{e}}}(nI_n + J_n) = H_n(a).$$

c. Les valeurs propres de $H_n(a)$ sont les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels les propriétés équivalentes suivantes sont satisfaites :

$$H_n(a) - \lambda I_n \notin \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R}) \iff J_n + \Big(n + \lambda\sqrt{\frac{n\mathbf{e}}{2}}\Big) I_n \notin \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})$$

$$\iff -n - \lambda\sqrt{\frac{n\mathbf{e}}{2}} \in \mathrm{Sp}\, J_n = \{0, n\}.$$

Il s'agit donc des deux réels $-\sqrt{\frac{2n}{\mathbf{e}}}$ et $-2\sqrt{\frac{2n}{\mathbf{e}}}$.

Remarque. On peut aussi, en complétant l'analyse menée en **1.c.**, s'appuyer sur la diagonalisation de J_n : à partir d'une matrice $P \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} J_n P = D_n = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n)$, il vient

$$H_n(a) = -\sqrt{\frac{2}{n\mathbf{e}}}(nI_n + PD_nP^{-1}) = P\Delta_n P^{-1}$$

où

$$\Delta_n = -\sqrt{\frac{2}{n\mathbf{e}}}(nI_n + D_n) = -\sqrt{\frac{2}{n\mathbf{e}}}\,\mathrm{diag}(n, \ldots, n, 2n),$$

d'où l'on déduit les valeurs propres de $H_n(a)$ puisque deux matrices semblables partagent les mêmes valeurs propres.

d. Il apparaît d'après les questions **3.b.** et **c.** qu'au point critique a, les valeurs propres de la matrice hessienne $H_n(a)$ sont toutes strictement négatives. Dans ces conditions, la fonction f_n présente au point a un maximum local.

e. En utilisant l'imparité évidente de f, on déduit de **d.** que f_n présente au point $b = -a$ un minimum local.

5. a. En étudiant la fonction h, on établit son tableau de variations :

t	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
h	0 $\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2\mathbf{e}}}$	$\searrow$ 0

b. C'est une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique aux vecteurs $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 = \langle \mathbb{1}, x\rangle^2 \leqslant \|\mathbb{1}\|^2 \, \|x\|^2 = n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

c. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a d'après **a.** et **b.** :

$$f_n(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big) = \sqrt{n}h\Big(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\Big) \leqslant \sqrt{\frac{n}{2\mathbf{e}}}$$

avec égalité pour $x = a$ par calcul direct ou compte-tenu des cas d'égalité dans les deux inégalités. Le maximum atteint au point a est donc global.
En utilisant de nouveau l'imparité de f_n, on en déduit que le minimum atteint en b est global.

6. a. On répond bien bravement à la question :

Listing 2 : calcul et affichage de $\mathrm{H}_n(a)$

```
n=input('Note pour ma pomme : entrer n...');
Hna=-2/sqrt(2*n*exp(1))*(n*eye(n,n)+ones(n,n));
disp(Hna);
```

b. La nappe proposée fait apparaître un maximum dans le quadrant $x > 0$, $y > 0$ et un minimum dans le quadrant $x < 0$, $y < 0$. Elle présente également une symétrie par rapport à l'origine. De ce point de vue, c'est une représentation graphique acceptable de la fonction f_2.

Problème

Première partie

1. On complète, on complète :

Listing 3 : Eh ben, la programmation fonctionnelle, c'est pas pour demain à l'EDHEC...

```
1  k=input('donnez une valeur pour k :');
2  p=input('donnez une valeur pour p :');
3  n=0; // compteur de lancers
4  c=0; // compteur de piles
5  while (c<k)
6      n=n+1;
7      if (rand()<p) then c=c+1;
8      end
9  end
10 disp(n)
```

2. Il suffit de remplacer la ligne 7 par

```
if (rand()<p) then c=c+1; else c=0;
```

afin de réinitialiser le compteur de piles chaque fois que face apparaît, de manière à ce qu'il compte à présent le nombre de piles de la série de piles consécutifs en cours.

Deuxième partie

3. La variable S_1 donne le temps d'attente du premier succès (apparition de pile) dans une suite d'expériences de Bernoulli (lancers de la pièce) indépendantes et de même paramètre p. Elle suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

4. a. La variable X_{n-1} compte le nombre de succès dans une suite de $n-1$ expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1,p)$.

b. Il est bien évident qu'il faut attendre au moins k lancers pour observer k piles... On a donc l'inclusion $S_k(\Omega) \subset [\![k,+\infty[\![$, dont on se contentera dans un premier temps, en attendant la question suivante, qui prouvera la réciproque, et bien plus.

Pour $n \geqslant k$, l'événement $[S_k = n]$ est réalisé si, et seulement si, on a observé $k-1$ piles lors des $n-1$ premiers lancers et on en observe un de plus lors du n-ième lancer : $[S_n = k] = [X_{n-1} = k-1] \cap P_n$.

c. Pour $n \geqslant k$, l'événement $[X_{n-1} = k-1]$ appartient à la tribu engendrée [1] par $P_1, \dots, P_{n-1}$ et est donc indépendant de P_n, si bien d'après **a.** et **b.** que :

$$\mathbb{P}(S_k = n) = \mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)\,\mathbb{P}(P_n) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} p = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

5. a. La variable Z_i mesure le nombre de lancers qui séparent l'apparition des $i-1$-ième et i-ième piles. On ne peut cependant pas l'interpréter comme le temps d'attente du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre, car le début de cette suite, c'est-à-dire le rang du premier lancer qui suit le $i-1$-ième pile, est aléatoire. On conditionne alors par $[S_{i-1} = j]$ pour $j \geqslant i-1$ donné afin se ramener à la situation standard : la loi conditionnelle de Z_i est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Il ne reste plus qu'à utiliser la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable S_{i-1} pour conclure : pour $\ell \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(Z_i = \ell) = \sum_{j=i-1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{i-1} = j)\,\mathbb{P}_{[S_{i-1}=j]}(Z_i = \ell) = q^{\ell-1} p \sum_{j=i-1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{i-1} = j) = q^{\ell-1} p.$$

La variable Z_i suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

b. Par télescopage, il vient $S_k = Z_1 + \cdots + Z_k$.

c. D'après la question **b.**, la variable S_k admet pour espérance

$$\mathbb{E}(S_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(Z_i) = \frac{k}{p}.$$

6. a. Comme les variables Z_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes d'après l'énoncé et admettent une espérance et une variance communes vu **5.a.**, la loi des grands nombres assure la convergence en probabilité de la suite $(\overline{Z}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ vers $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{1}{p}$.

b. Puisque $\overline{Z}_k$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $k \geqslant 2$, ainsi que sa limite $\frac{1}{p}$, où la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue, le résultat admis garantit la convergence en probabilité de la suite de terme général $\frac{1}{\overline{Z}_k} = \frac{k}{S_k}$, $k \geqslant 2$, vers p : ainsi $\frac{k}{S_k}$ est-il un estimateur convergent de p.

c. On a déjà vu que $\sum_{j=k-1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} = j) = 1$. La série ci-dessous est donc absolument convergente, si bien que le théorème de transfert garantit l'existence de

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\frac{k-1}{S_k-1}\Big) &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{k-1}{j-1}\,\mathbb{P}(S_k = j) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{k-1}{j-1}\binom{j-1}{k-1} p^k q^{j-k} = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j-2}{k-2} p^k q^{j-k} \\ &= \sum_{j=k-1}^{\infty} \binom{j-1}{k-2} p^k q^{j+1-k} = p \sum_{j=k-1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} = j) = p.\end{aligned}$$

d. Sachant que $S_k \geqslant k$, on a $0 \leqslant \frac{k}{S_k} \leqslant 1$ où la variable constante égale à 1 admet une espérance, si bien que $\frac{k}{S_k}$ admet une espérance par domination.

Par ailleurs, pour $k, s \geqslant 2$,

$$\frac{k-1}{s-1} \leqslant \frac{k}{s} \quad\Longleftrightarrow\quad (k-1)s \leqslant (s-1)k \quad\Longleftrightarrow\quad k \leqslant s$$

avec équivalence entre les cas d'égalité. Puisque $S_k \geqslant k$, il en ressort que $\frac{k-1}{S_k-1} \leqslant \frac{k}{S_k}$. La variable $\frac{k}{S_k} - \frac{k-1}{S_k-1}$ étant ainsi positive, sans être presque sûrement nulle (car $S_k(\Omega)$ ne se réduit pas à $\{k\}$),

1. De manière moins formelle, la réalisation de cet événement ne dépend que des résultats des $n-1$ premiers lancers.

on en déduit d'après **c.** que :

$$\mathbb{E}\Big(\frac{k}{S_k}\Big) - p = \mathbb{E}\Big(\frac{k}{S_k}\Big) - \mathbb{E}\Big(\frac{k-1}{S_k-1}\Big) = \mathbb{E}\Big(\frac{k}{S_k} - \frac{k-1}{S_k-1}\Big) > 0,$$

ce qui met en évidence que $\frac{k}{S_k}$ est un estimateur biaisé de p.

Troisième partie

7. En comparant les définitions, il vient immédiatement $S_1 = T_1$.

8. a. Les événements $F_1 = [W=1]$, $P_1 \cap F_2 = [W=2]$, $P_1 \cap P_2 \cap F_3 = [W=3], \ldots, P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k = [W=k]$ et $P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap P_k = [W>k]$ forment un système complet.

b. Sachant l'événement F_1 réalisé, aucune série de piles consécutifs n'est engagée après le premier lancer de sorte que $T_k - 1$ donne le rang du dernier pile de la première série de k piles consécutifs dans la suite des lancers qui suivent le lancer initial. La loi conditionnelle de $T_k - 1$ sachant F_1 est donc identique à la loi de T_k. Par suite, $\mathbb{E}(T_k - 1 \,|\, F_1) = \mathbb{E}(T_k)$ i.e. $\mathbb{E}(T_k \,|\, F_1) = 1 + \mathbb{E}(T_k)$.

c. On justifie de même, pour $i \in [\![2,k]\!]$, que $\mathbb{E}(T_k \,|\, P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) = i + \mathbb{E}(T_k)$.

d. De manière immédiate, $\mathbb{E}(T_k \,|\, P_1 \cap \cdots \cap P_k) = \mathbb{E}(k \,|\, P_1 \cap \cdots \cap P_k) = k$.

9. a. Par application de la formule de l'espérance totale à la variable T_k, qui admet une espérance par hypothèse, et au système complet de la question **8.a.**, il vient d'après **8.b.**, **8.c.** et **8.d.** :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_k) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i)\, \mathbb{E}(T_k \,|\, P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i) + \\ &\qquad\qquad + \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_k)\, \mathbb{E}(T_k \,|\, P_1 \cap \cdots \cap P_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p^{i-1} q\big(i + \mathbb{E}(T_k)\big) + kp^k = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) p^j q + \mathbb{E}(T_k) \sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k.\end{aligned}$$

b. En notant

$$\varphi_k : p \in \,]0,1[\, \longmapsto \sum_{j=0}^{k-1} p^{j+1} = p\frac{1-p^k}{1-p},$$

il vient d'après **a.**, puisque la somme ci-dessus est finie :

$$\mathbb{E}(T_k) = \frac{\varphi_k'(p) q + kp^k}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} p^j q} = \frac{\frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1}}{(1-p)^2} q + kp^k}{p^k} = \frac{1-(k+1)p^k + kp^k(p+q)}{p^k q} = \frac{1-p^k}{p^k q}.$$

10. Pour $k \geqslant 2$, il ressort immédiatement de la définition que $S_k \leqslant T_k$ d'où, puisque les deux variables admettent une espérance, $\mathbb{E}(S_k) \leqslant \mathbb{E}(T_k)$, ce qui s'écrit encore d'après **5.c.** et **9.b.**,

$$\frac{k}{p} \leqslant \frac{1-p^k}{p^k q} \iff kp^{k-1}(1-p) \leqslant 1 - p^k \iff kp^{k-1} - 1 \leqslant (k-1)p^k.$$

Il est clair que la dernière inégalité est encore valable pour $k = 1$.