Corrigé

Exercice 1 ....

1) La fonction f_n est dérivable (car polynomiale) sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0 \text{ (car } x \text{ est positif)}$$

La fonction f_n est donc continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de plus on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(0) = 1$, donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty, 1]$.

Comme 0 appartient à $]-\infty, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution que l'on note u_n.

2) a) Comme $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = -1$, on a : $f_n(1) < f_n(u_n) < f_n(0)$. La stricte décroissance de f_n assure alors que :

$$\boxed{0 < u_n < 1}$$

b) Par définition de f_{n+1}, on a : $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1}$

Comme $f_n(u_n) = 0$, on a $1 - u_n = u_n^n$ et on obtient :

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n)$$

On sait que u_n appartient à $]0,1[$ donc :

$$\boxed{f_{n+1}(u_n) > 0}$$

Par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et ainsi, l'inégalité précédente s'écrit :

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$$

La stricte décroissance de f_{n+1} assure alors que : $u_n < u_{n+1}$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1) donc elle est convergente.

d) Comme, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à $]0,1[$, la limite ℓ de la suite (u_n) appartient à $[0,1]$ et comme la suite (u_n) est croissante, on a : $0 \leq u_n \leq \ell$.

En élevant à la puissance n (on peut car tout est positif), on obtient : $0 \leq u_n^n \leq \ell^n$.

Si l'on avait ℓ élément de $[0,1[$, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$, et par encadrement, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. En injectant ce résultat dans la relation $1-u_n = u_n^n$ et en passant à la limite, on trouverait $\ell = 1$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
Pour résumer, on a montré (par l'absurde) que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

3) a) Comme u_n appartient à $]0,1[$, on a en particulier $u_n < 1$, ce qui montre que :

$$\boxed{v_n > 0}$$

Pour tout entier naturel *n*, on a : $\ln v_n = \ln(1-u_n) = \ln(u_n^n) = n\ln u_n = n\ln(1-v_n)$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\ln(1-v_n) \underset{+\infty}{\sim} -v_n$
Par compatibilité des équivalents avec la multiplication, on trouve :

$$\boxed{\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n}$$

b) D'après l'équivalent précédent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-\ln v_n}{nv_n}\right) = 1$ et, par continuité de la fonction ln en 1, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{-\ln v_n}{nv_n}\right) = 0}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\ln v_n) = +\infty$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{-\ln v_n}{nv_n}\right)}{-\ln v_n} = 0$.
Ceci s'écrit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(-\ln v_n) - \ln n - \ln v_n}{-\ln v_n}\right) = 0$ et on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(-\ln v_n)}{-\ln v_n} + \frac{\ln n}{\ln v_n} + 1\right) = 0$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(-\ln v_n)}{-\ln v_n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, il reste : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln n}{\ln v_n} + 1\right) = 0$.
Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\ln v_n} = -1$, ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\ln n}{\ln v_n} = 1$.
On peut conclure :

$$\boxed{\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n}$$

c) On a vu que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$ et que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n$ donc, par transitivité de la relation d'équivalence, on a : $-\ln n \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n$.

On peut conclure :

$$\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}}$$

4) On sait que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann de paramètre 1), le critère de comparaison pour les séries à termes positifs prouve que la série de terme général $\frac{\ln n}{n}$ diverge également. Enfin, le critère d'équivalence, toujours pour les séries à termes positifs, assure que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } v_n \text{ diverge}}$$

Par compatibilité des équivalents avec l'élévation au carré, on a : $v_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2} v_n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{1/2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln n}{n^{1/4}}\right)^2 = 0$ donc $v_n^2 \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ (série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$), le critère de comparaison pour les séries à termes positifs prouve que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } v_n^2 \text{ converge}}$$

Exercice 2..

1) D'après la définition d'un endomorphisme antisymétrique, on a, avec $y = x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$$

Par symétrie du produit scalaire, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ 2\langle f(x), x\rangle = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x), x\rangle = 0}$$

2) Soit λ une valeur propre de f, alors si l'on considère un vecteur propre x non nul, associé, on a $\langle \lambda x, x\rangle = 0$, et par bilinéarité du produit scalaire, on obtient $\lambda\langle x, x\rangle = 0$, c'est-à-dire $\lambda \| x \|^2 = 0$. Comme x est non nul, on en déduit : $\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{0 est la seule valeur propre réelle possible de } f}$$

Comme l'énoncé admet que *f* possède au moins une valeur propre réelle, alors :

$$\boxed{f \text{ admet } 0 \text{ comme seule valeur propre réelle}}$$

3) a) • Soit x un élément de $\operatorname{Ker}(f)$. On a $f(x)=0$ et grâce à l'antisymétrie de *f*, on obtient : $\forall y \in \mathbb{R}^3,\ 0=-\langle x, f(y)\rangle$.
Ceci équivaut à dire que x appartient à $\operatorname{Im}(f)^{\perp}$ et on a : $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Im}(f)^{\perp}$.

• Réciproquement, si x appartient à $\operatorname{Im}(f)^{\perp}$, alors :
$\forall y \in \mathbb{R}^3$, $\langle x, f(y)\rangle = 0$. On en déduit : $\forall y \in \mathbb{R}^3$, $-\langle f(x), y\rangle = 0$.
En particulier pour $y = f(x)$, on trouve : $\| f(x)\|^2 = 0$. On a donc $f(x)=0$, ce qui montre que x appartient à $\operatorname{Ker}(f)$ et on a : $\operatorname{Im}(f)^{\perp} \subset \operatorname{Ker}(f)$.
On a donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)^{\perp}$ et ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } \mathbb{R}^3}$$

Remarque. On pouvait se contenter de montrer une seule inclusion et argumenter sur les dimensions car on a $\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \operatorname{Im}(f)^{\perp}$.

4) Si la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ est égale à 3, alors *f* est l'endomorphisme nul et sa matrice dans n'importe quelle base est la matrice nulle. Il existe donc une base dans laquelle la matrice de *f* est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\alpha = 0$.

5) a) Comme $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$, il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ faite de la juxtaposition (ou concaténation) d'une base orthonormale de $\operatorname{Im}(f)$ contenant un seul vecteur, noté e_1, puisque $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension 1, et d'une base orthonormale de $\operatorname{Ker}(f)$ contenant deux vecteurs, notés e_2 et e_3, puisque $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On a $f(e_2) = f(e_3) = 0$ donc :

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est de la forme : } A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) Pour tout y de $\mathbb{R}^3$, donc en particulier pour tout y de $\mathrm{Im}(f)$, $f(y)$ est, par définition, élément de $\mathrm{Im}(f)$ donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est stable par } f}$$

On en déduit que $f(e_1)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ et ainsi, il existe un réel k tel que $f(e_1) = ke_1$, ce qui prouve que b et c sont nuls et (en posant $k = a$), la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) On a : $\langle f(e_1), e_1 \rangle = \langle ae_1, e_1 \rangle = a\| e_1 \|^2$. D'après la première question, on sait que $\langle f(e_1), e_1 \rangle = 0$, ce qui prouve que a est nul (puisque le vecteur e_1 est non nul en tant que vecteur de la base $\mathcal{B}$).
La matrice A est donc la matrice nulle, ce qui prouve qu'il est impossible que l'on ait $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.

6) a) Comme à la question 5a), mais avec $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, on peut construire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Im} f$ et où e_3 appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Comme $f(e_3) = 0$ et comme $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f (démonstration déjà faite), $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont combinaisons linéaires de e_1 et e_2, on obtient :

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est de la forme } A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) • On sait que $\langle f(e_1), e_1 \rangle = 0$ donc $\langle ae_1 + ce_2, e_1 \rangle = 0$ et on a, par bilinéarité du produit scalaire :

$$a\| e_1 \|^2 + c\langle e_2, e_1 \rangle = 0$$

Comme e_1 et e_2 sont orthogonaux, il reste $a\| e_1 \|^2 = 0$, et comme e_1 n'est pas nul, on obtient $a = 0$.

• De même, on sait que $\langle f(e_2), e_2 \rangle = 0$ donc $\langle be_1 + de_2, e_2 \rangle = 0$ et on a :

$$b\langle e_2, e_1 \rangle + d\| e_2 \|^2 = 0$$

Comme e_1 et e_2 sont orthogonaux, il reste $d\|e_2\|^2=0$, et comme e_2 n'est pas nul, on obtient $d=0$.

• On sait aussi que $\langle f(e_1),e_2\rangle=-\langle e_1,f(e_2)\rangle$, ce qui donne, compte tenu du fait que a et d sont nuls : $\langle ce_2\,,\,e_2\rangle=-\langle e_1,be_1\rangle$.

On a donc : $c\|e_2\|^2=-b\|e_1\|^2$ et comme e_1 et e_2 sont normés, il reste $c=-b$.

d) En posant $b=\alpha$, on constate que :

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $A=\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\-\alpha&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Exercice 3 ....

1) Comme on sait simuler une variable aléatoire suivant une loi exponentielle à l'aide de `grand`, on peut proposer :

```
X=grand(1,1,'exp',2)
Y=sqrt(X)
```

2) a) • La variable X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, Y est bien définie et Y prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc, d'ores et déjà : $\forall x<0,\ F_Y(x)=0$.

• Pour tout réel x positif ou nul, on a :

$$F_Y(x)=P(Y\le x)=P\left(\sqrt{X}\le x\right)$$

Comme la fonction $t\mapsto t^2$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient, en notant F_X la fonction de répartition de X :

$$F_Y(x)=P\left(X\le x^2\right)=F_X\left(x^2\right)$$

Comme X suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et comme $x^2\ge 0$, on a :

$$\forall x\ge 0,\ F_Y(x)=1-e^{-x^2/2}$$

Bilan :

$$\boxed{F_Y(x)=\begin{cases}1-e^{-x^2/2}\text{ si } x\ge 0\\0\text{ si } x<0\end{cases}}$$

b) On dérive $F_Y(x)$ sauf en 0, ce qui donne : $f_Y(x)=\begin{cases}xe^{-x^2/2}\text{ si } x>0\\0\text{ si } x<0\end{cases}$.

En posant $f_Y(0)=0$, on obtient une densité de Y définie par :

$$\boxed{f_Y(x)=\begin{cases} xe^{-x^2/2} \text{ si } x\geq 0 \\ 0 \text{ si } x<0 \end{cases}}$$

3) a) Comme Z suit la loi normale centrée réduite, on a : $V(Z)=1$ et $E(Z)=0$.
Par conséquent, grâce à la formule de Koenig-Huygens, on obtient :

$$\boxed{E(Z^2)=1}$$

b) • On a déjà $\int_{-\infty}^{0} x f_Y(x)\,dx=0$ (sans aucun problème de convergence puisque f_Y est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$).

• Pour tout réel x positif ou nul, on a : $x f_Y(x)=x^2 e^{-x^2/2}$

Or on sait que si Z suit la loi normale centrée réduite, alors $E(Z^2)=1$, ce qui s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2} dx=1$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$ converge et est égale à $\sqrt{2\pi}$. Comme $x\mapsto x^2 e^{-x^2/2}$ est paire, on en déduit :

$$\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

Ceci s'écrit aussi $\int_{0}^{+\infty} x f_Y(x)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$, et comme $\int_{-\infty}^{0} x f_Y(x)\,dx=0$, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ ce qui veut exactement dire que Y a une espérance avec de plus :

$$\boxed{E(Y)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

4) a) Comme $-\frac{X}{2}$ prend des valeurs négatives, $e^{-X/2}$ prend des valeurs inférieures ou égales à 1. Comme de plus, la fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives, $e^{-X/2}$ prend ses valeurs dans $]0,1]$, ce qui fait que $-e^{-X/2}$ prend ses valeurs dans $[-1,0[$.
En ajoutant 1, on voit que $U=1-e^{-X/2}$ prend ses valeurs dans $[0,1[$.
On a bien :

$$\boxed{U(\Omega)=[0,1[}$$

b) D'après la question précédente, on a déjà : $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$.

Pour tout x de $[0,1[$, on a :

$$F_U(x) = P(U \leq x) = P\left(1 - e^{-X/2} \leq x\right) = P\left(e^{-X/2} \geq 1 - x\right)$$

Comme $1 - x > 0$ et comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit :

$$\forall x \in [0,1[,\ F_U(x) = P\left(-\frac{X}{2} \geq \ln(1-x)\right) = P(X \leq -2\ln(1-x))$$

On sait que $F_X(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z/2} \text{ si } z \geq 0 \\ 0 \text{ si } z < 0 \end{cases}$ donc on obtient finalement :

$$\forall x \in [0,1[,\ F_U(x) = 1 - e^{-\frac{-2\ln(1-x)}{2}} = 1 - e^{\ln(1-x)} = 1 - (1-x) = x$$

Bilan :

$$\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}}$$

On reconnaît que :

$$\boxed{U \text{ suit la loi uniforme sur } [0,1[}$$

c) On a $U = 1 - e^{-X/2}$ donc $1 - U = e^{-X/2}$, puis $\ln(1-U) = -\frac{X}{2}$ et enfin :

$$\boxed{X = -2\ln(1-U)}$$

Comme U suit la loi uniforme sur $[0,1[$ que l'on simule avec `rand()`, et comme $Y = \sqrt{X}$, on peut proposer :

```
U=rand()
X=-2*log(1-U)
Y=sqrt(X)
```

Problème ....

1) a) Par définition, $p_0(0) = P(N_0 = 0)$ et comme il est certain qu'il n'y aura aucun appel dans l'intervalle de temps [0, 0], on a :

$$\boxed{p_0(0) = 1}$$

Le même argument montre que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n(0) = 0}$$

Conclusion : la variable N_0 est la variable quasi-certaine égale à 0.

2) a) La fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_0(t) = p_0(t)e^{\lambda t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $f_0'(t) = \left(\lambda p_0(t) + p_0'(t)\right)e^{\lambda t}$. D'après l'énoncé, on en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f_0'(t) = 0$$

Ceci prouve que f_0 est constante sur $\mathbb{R}_+$: $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f_0(t) = k$.

D'après la première question, on sait que $p_0(0) = 1$, on a donc $f_0(0) = p_0(0)e^{\lambda \times 0} = 1$, ce qui prouve que $k = 1$ et, par conséquent :

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ f_0(t) = 1}$$

b) On a, pour tout réel *t* positif : $f_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$.

Par conséquent : $f_n'(t) = \lambda e^{\lambda t} p_n(t) + e^{\lambda t} p_n'(t) = e^{\lambda t}\left(\lambda p_n(t) + p_n'(t)\right)$.

D'après l'énoncé, on sait que $p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$ donc :

$$f_n'(t) = e^{\lambda t}\left(\lambda p_n(t) - \lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)\right) = \lambda p_{n-1}(t) e^{\lambda t}$$

On trouve ainsi :

$$\boxed{f_n'(t) = \lambda f_{n-1}(t)}$$

c) i) Comme on a supposé que $f_{n-1}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$, on obtient :

$$f_n'(t) = \lambda \times \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1}$$

En primitivant, on en déduit qu'il existe une constante K telle que :

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \times \frac{t^n}{n} + K = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + K$$

ii) D'après la première question, on sait que, pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, on a $p_n(0) = 0$ donc $f_n(0) = e^{\lambda \times 0} p_n(0) = p_n(0) = 0$ et, d'après l'expression ci-dessus, en donnant à *t* la valeur 0, on obtient : $0 = K$. On en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geq 0,\ f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

3) a) La question 2) a consisté à montrer par récurrence (la question 2a) étant l'initialisation et la question 2b) l'hérédité) que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \geq 0,\ f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

Comme $p_n(t) = e^{-\lambda t} f_n(t)$, on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \geq 0,\ p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

b) En revenant à la définition de $p_n(t)$, on obtient, pour tout entier naturel n,

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Comme $\lambda t > 0$, ceci prouve que :

$$\boxed{N_t \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda t}$$

4) a) L'événement ($S_1 > t$) est réalisé si, et seulement si, le premier appel survient strictement après l'instant t, ce qui signifie qu'il n'y a eu aucun appel dans l'intervalle de temps $[0, t]$. En d'autres termes, on a :

$$\boxed{(S_1 > t) = (N_t = 0)}$$

On en déduit, en passant aux probabilités :

$$\forall t \geq 0,\ P(S_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

En notant F_{S_1} la fonction de répartition de S_1, on a :

$$\forall t \geq 0,\ F_{S_1}(t) = P(S_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Comme de plus, $F_{S_1}(t) = 0$ si t est strictement négatif, on conclut :

$$\boxed{S_1 \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

b) L'événement $(S_n > t)$ est réalisé si, et seulement si, le $n^{\text{ème}}$ appel survient strictement après l'instant t, ce qui signifie qu'il y a eu au maximum $n-1$ appels dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

On a donc :

$$\boxed{(S_n > t) = (N_t \leq n-1)}$$

c) On en déduit : $P(S_n > t) = P(N_t \le n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} P(N_t = i)$.

En remplaçant les probabilités, on obtient :

$$P(S_n > t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

En notant F_n la fonction de répartition de S_n, on a :

$$F_n(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \text{ si } t \ge 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

• La fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}$ (elle est constante sur $\mathbb{R}_-^*$, c'est une somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus, on a, d'une part $\lim_{t\to 0^-} F_n(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0$ et, d'autre part :

$$\lim_{t\to 0+} F_n(t) = 1 - \lim_{t\to 0^+} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} = 1 - \lim_{t\to 0^+} e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda t + \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) = 0$$

• La fonction F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (elle est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et c'est une somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$).

Conclusion :

$$\boxed{S_n \text{ est une variable à densité}}$$

En dérivant F_n sauf en 0, on trouve :

$$F_n'(t) = \begin{cases} \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda i (\lambda t)^{i-1}}{i!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Le terme numéro 0 de la deuxième somme est nul et en simplifiant, on obtient :

$$F_n'(t) = \begin{cases} \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda (\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

En changeant d'indice, toujours dans la deuxième somme, on a :

$$F_n'(t) = \begin{cases} \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \lambda \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Les deux sommes se simplifient et il ne reste que le terme numéro $n-1$ de la première :

$$F_n'(t) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

En regroupant, on a finalement :

$$F_n'(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} \text{ si } t>0\\ 0 \text{ si } t<0\end{cases}$$

On obtient une densité f_n de S_n en posant par exemple $f_n(0)=0$, ce qui donne :

$$f_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} \text{ si } t>0\\ 0 \text{ si } t\leq 0\end{cases}$$

5) a) D'après l'énoncé, le nombre d'appels N_u reçus entre les instants 0 et u est indépendant du nombre d'appels N_t-N_u reçus entre les instants u et t donc :

$$\boxed{N_u \text{ et } N_t-N_u \text{ sont indépendantes}}$$

b) Avec le système complet d'événements $(N_u=i)_{i\in\mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales s'écrit :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P(N_t=n)=\sum_{i=0}^{+\infty}P([N_u=i]\cap[N_t=n])$$

Comme $u<t$ le nombre d'appels reçus dans l'intervalle $[0,\,t]$ ne peut pas être supérieur au nombre d'appels reçus dans l'intervalle $[0,\,t]$ donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P(N_t=n)=\sum_{i=0}^{n}P([N_u=i]\cap[N_t=n])$$

On en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P(N_t=n)=\sum_{i=0}^{n}P([N_u=i]\cap[N_t-N_u=n-i])$$

Par indépendance de N_u et N_t-N_u, on obtient :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P(N_t=n)=\sum_{i=0}^{n}P(N_u=i)P(N_t-N_u=n-i)}$$

c) • En donnant à n la valeur 0, on obtient :

$$P(N_t=0)=P(N_u=0)P(N_t-N_u=0)$$

On connaît les lois de N_t et N_u et en remplaçant, on trouve :

$$e^{-\lambda t}=e^{-\lambda u}P(N_t-N_u=0)$$

On a donc :

$$\boxed{P(N_t-N_u=0)=e^{-\lambda(t-u)}}$$

• En donnant à n la valeur 1, on obtient :

$$P(N_t=1)=P(N_u=0)P(N_t-N_u=1)+P(N_u=1)P(N_t-N_u=0)$$

En remplaçant, on trouve :

$$\lambda t e^{-\lambda t}=\lambda u e^{-\lambda u}e^{-\lambda(t-u)}+e^{-\lambda u}P(N_t-N_u=1)$$

En arrangeant un peu, on trouve : $\lambda(t-u)e^{-\lambda t}=e^{-\lambda u}P(N_t-N_u=1)$

On a enfin :

$$\boxed{P(N_t-N_u=1)=\lambda(t-u)e^{-\lambda(t-u)}}$$

d) On procède par récurrence forte.

• Pour $n=0$, l'initialisation est déjà faite.

• Supposons, pour un entier naturel n fixé non nul que, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, on ait : $P(N_t-N_u=k)=\dfrac{\left[\lambda(t-u)\right]^k}{k!}e^{-\lambda(t-u)}$.

D'après la question 5b), on peut écrire :

$$P(N_t=n)=\sum_{i=0}^{n}P(N_u=i)P(N_t-N_u=n-i)$$

En isolant le terme d'indice 0, on trouve :

$$P(N_t=n)=P(N_u=0)P(N_t-N_u=n)+\sum_{i=1}^{n}P(N_u=i)P(N_t-N_u=n-i)$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à tous les termes de la somme et remplacer les probabilités connues (concernant les lois de N_u et N_t) et on trouve :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda u}\times P(N_t-N_u=n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda u)^i}{i!}e^{-\lambda u}\times\frac{\left[\lambda(t-u)\right]^{n-i}}{(n-i)!}e^{-\lambda(t-u)}$$

En multipliant par $e^{\lambda u}$ de chaque côté, on obtient :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}=P(N_t-N_u=n)+e^{-\lambda(t-u)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda u)^i}{i!}\times\frac{\left[\lambda(t-u)\right]^{n-i}}{(n-i)!}$$

Il reste à faire apparaître un coefficient binomial dans la somme, ce qui donne :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}=P(N_t-N_u=n)+\frac{e^{-\lambda(t-u)}}{n!}\sum_{i=1}^{n}\tbinom{n}{i}(\lambda u)^i\left[\lambda(t-u)\right]^{n-i}$$

En ajoutant et enlevant le terme d'indice 0 dans la somme, on a alors :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}=P(N_t-N_u=n)+\frac{e^{-\lambda(t-u)}}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}\tbinom{n}{i}(\lambda u)^i\left[\lambda(t-u)\right]^{n-i}-\left[\lambda(t-u)\right]^n\right)$$

Grâce à la formule du binôme, on trouve :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}=P(N_t-N_u=n)+\frac{e^{-\lambda(t-u)}}{n!}\left((\lambda t)^n-\left[\lambda(t-u)\right]^n\right)$$

Les termes $\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda(t-u)}$ se simplifient et il reste :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_t - N_u = n) = \frac{[\lambda(t-u)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-u)}}$$

6) a) Par définition, R_t est la variable aléatoire égale à l'instant où survient le N_t-ième appel, ce qui veut dire que :

$$\boxed{R_t \text{ est l'instant où survient le dernier appel avant l'instant } t}$$

b) Avec le système complet d'événements $(N_t = n)_{n\in\mathbb{N}}$ la formule des probabilités totales s'écrit : $P(R_t > u) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([R_t > u] \cap [N_t = n])$.

• Pour $n = 0$, on a $[R_t > u] \cap [N_t = 0] = \varnothing$, car, d'après l'énoncé, si N_t prend la valeur 0, R_t prend aussi la valeur 0 donc $[R_t > u]$ ne peut pas être réalisé.
Ainsi, il reste :

$$P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([R_t > u] \cap [N_t = n])$$

• D'autre part, pour $n \geq 1$, on a :
$[R_t > u] \cap [N_t = n] = [S_{N_t} > u] \cap [N_t = n] = [S_n > u] \cap [N_t = n]$
On trouve alors :

$$\boxed{\forall t > 0,\ \forall u \in [0, t],\ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([S_n > u] \cap [N_t = n])}$$

c) D'après la question 4b), on a :

$$P([S_n > u] \cap [N_t = n]) = P([N_u \leq n-1] \cap [N_t = n]) = \sum_{i=0}^{n-1} P([N_t = n] \cap [N_u = i])$$

On en déduit :

$$P([S_n > u] \cap [N_t = n]) = \sum_{i=0}^{n-1} P([N_t - N_u = n-i] \cap [N_u = i])$$

En injectant ceci dans l'égalité donnant $P(R_t > u)$, on obtient :

$$\boxed{\forall t > 0,\ \forall u \in [0, t],\ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P([N_u = i] \cap [N_t - N_u = n-i])}$$

d) Par indépendance de $N_t - N_u$ et N_u, on a :

$$\forall t > 0\,,\ \forall u \in [0,\, t]\,,\ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(N_u = i) P(N_t - N_u = n-i)$$

En remplaçant les probabilités par leur valeur, on obtient :

$$\forall t > 0\,,\ \forall u \in [0,\, t]\,,\ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda u)^i}{i!} e^{-\lambda u} \times \frac{[\lambda(t-u)]^{n-i}}{(n-i)!} e^{-\lambda(t-u)}$$

En simplifiant un peu, on trouve :

$$\forall t > 0\,,\ \forall u \in [0,\, t]\,,\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \tbinom{n}{i} (\lambda u)^i [\lambda(t-u)]^{n-i}$$

On ajoute et on retire le terme numéro n dans la somme :

$$\forall t > 0\,,\ \forall u \in [0,\, t]\,,\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} (\lambda u)^i [\lambda(t-u)]^{n-i} - (\lambda u)^n \right)$$

Avec la formule du binôme, on obtient :

$$\forall t > 0\,,\ \forall u \in [0,\, t]\,,\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left((\lambda t)^n - (\lambda u)^n \right)$$

Comme $\frac{1}{0!}\left((\lambda t)^0 - (\lambda u)^0 \right) = 0$, on peut écrire :

$$\forall t > 0\,,\ \forall u \in [0,\, t]\,,\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left((\lambda t)^n - (\lambda u)^n \right)$$

On reconnaît deux séries exponentielles convergentes, ce qui donne :

$$\forall t > 0\,,\ \forall u \in [0,\, t]\,,\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \left(e^{\lambda t} - e^{\lambda u} \right) = 1 - e^{-\lambda(t-u)}$$

On a donc :

$$\forall t > 0\,,\ \forall u \in [0,\, t]\,,\ F_t(u) = e^{-\lambda(t-u)}$$

En notant que F_t est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et est égale à 1 sur $]t, +\infty[$, on a enfin :

$$\boxed{F_t(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u < 0 \\ e^{-\lambda(t-u)} \text{ si } 0 \le u \le t \\ 1 \text{ si } u > t \end{cases}}$$

e) R_t n'est pas une variable à densité puisque F_t n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (problème de continuité en 0).

R_t n'est pas non plus une variable discrète puisque son support est $[0,\, t]$.