BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Code épreuve : **297**

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique
Vendredi 6 mai 2011

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, notée n ($n \in \mathbb{N}^*$) et u un endomorphisme de E. On note Id l'identité de E.
Si $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_pX^p$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant : $P(u) = a_0I + a_1u + ... + a_pu^p$ où u^k est la composée $\underbrace{u \circ u \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$ ($u^0 = Id$ par convention) .

Dans toute la suite Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$. Ainsi on peut écrire $Q(X) = (X-1)Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

1. Montrer que l'image de $(u - Id)$ est contenue dans $\text{Ker}(Q_1(u))$
2. On note $E_1 = Ker(u - Id)$.
   (a) Montrer que si $x \in E_1$ alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1).x$.
   (b) En déduire que $E_1 \cap \text{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$
   (c) En déduire à l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \text{Ker}(Q_1(u))$.
3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.
4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u; on note E_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1.

   Montrer que si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de E_1 est égale à 2 ou égale à 3).

Exercice 2

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue « au hasard »une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :
• à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules

dans l'urne et on dit qu'une paire est reconstituée.
• si les deux boules portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, et tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour reconstituer i paires.
On admet qu'il existe un espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. (a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.
   (b) Donner, sans calcul la valeur de l'espérance de T_1.
2. Compléter la partie principale du programme suivant afin qu'il affiche une réalisation de la variable T_1 :

```
begin
randomize; readln(n);t := 0;
repeat a := random(n)+1;b := random(n)+1;
t := t+1;
until.......;
writeln(t);
end.
```

3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $[\![2,n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.
   (a) Que représente la variable X_i ?
   (b) Déterminer, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ la loi de X_i ainsi que son espérance.
   (c) En déduire que T_n admet une espérance mathématique et que l'on a $\mathbb{E}(T_n) = n^2$.
4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent.
   On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.
   (a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 0])$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n = 0])$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}([S_n = n]) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.
5. Expliquer ce que fait la partie principale du programme suivant :

```
begin
randomize; readln(n);m := n;z := 0;
for k := 1 to n do
begin
a := random(m)+1;b := random(m)+1;
if a=b then begin z := z+1; m := m-1;end;
end;
writeln(z);
end.
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que, pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est convergente.

On admet que l'application, notée $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P,Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

est un produit scalaire. On note $\| \ \|$ la norme associée.

2. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :
$$\langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle = \langle P, Q\rangle - P(0)Q(0).$$
   (b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur , alors on a $|P(0)| = \|P\|$.

3. On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant :
$$(\mathcal{R}) \begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ d^\circ(L_k) = k \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ L_k(0) = 1 \\ (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$
   (a) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \dots, M_n)$ vérifiant les relations $\mathcal{R}$.
   Montrer que, pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, $L_k = M_k$.
   (b) On note $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ la famille obtenue (à partir de la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
      i. Justifier, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, la relation $P_k(0) \neq 0$.
      ii. En déduire une famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant $\mathcal{R}$.
   (c) Conclure et calculer explicitement L_1 et L_2.

Problème

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On considère aussi, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire M_n, définie par : $M_n = \sup(X_1, X_2, \dots X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
On cherche alors des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, telles que la suite $\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire non constante.
La fonction exponentielle sera indifféremment notée $(x \to e^x)$ ou exp.

Partie 1 - La loi exponentielle

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

1. Soit g la fonction définie que $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x}\exp\left(-e^{-x}\right)$.
   (a) Montrer que g est une densité de probabilité. On note G une variable aléatoire admettant g comme densité.
   (b) Déterminer la fonction de répartition, notée F_G, de la variable G.
2. (a) Donner, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable M_n.
   (b) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = \lambda M_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

Partie 2 - La loi normale

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est une loi normale centrée réduite. Soit φ la densité de X_1.

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$ est convergente et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\mathbb{P}(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.$$

(b) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\mathbb{P}(X_1 > x)}{x^2} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

puis que

$$\mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq \mathbb{P}(X_1 > x)(1 + \frac{1}{x^2}).$$

2. Soit c un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $\frac{\phi(x)}{x} = \frac{c}{n}$ admet sur $]0, +\infty[$ une unique solution que l'on notera x_n.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
4. Montrer que pour tout entier n non nul,

$$x_n^2 + 2\ln x_n = 2\ln n - \ln(2c^2\pi).$$

5. En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question 4., montrer que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}.$$

En déduire que l'on peut écrire pour $n \geq 2$,

$$x_n = \sqrt{2\ln n} + \varepsilon_1(n) \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}} = 0.$$

6. (a) En utilisant la question 4., montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$2(\sqrt{2\ln n})\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\big(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\big) = -\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2).$$

(b) En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation du a), montrer que

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln n).$$

En déduire que
$\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon_2(n)$ où $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_2(n)(\frac{2\sqrt{2\ln n}}{\ln(\ln n)}) = 0.$

On admet alors qu'en poursuivant le développement asymptotique, que l'on peut écrire pour tout entier n supérieur à 2 :

$$x_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln c}{\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon(n)$$

$$\textit{avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n)\sqrt{2ln(n)} = 0.$$

7. On pose pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\ln n}}$ et $b_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}}$.
Montrer à l'aide des questions précédentes, que pour tout x réel, et pour tout entier $n \geq 2$, en posant $c = e^{-x}$ que :

(a)

$$a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$$

(b)

$$\frac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}.$$

(c) En déduire , en utilisant la question 1.b. que $\frac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 > a_n x + b_n)$ puis que la suite $(\frac{M_n - b_n}{a_n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable G (la variable G est définie dans la partie 1.)