Intégrales généralisées

Travaux dirigés

Thème 1 : Comparaison série-intégrale

Dans la première question, on démontre les résultats du cours concernant le principe de comparaison série-intégrale puis on les utilise dans les questions suivantes.

1. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$. On considère la série de terme général $f(n)$, $n \geqslant n_0$, dont on note $(\mathrm{S}_n)_{n \geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k).$$

a. Justifier que :

$$\forall k \geqslant n_0 + 1, \qquad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Pour $x \geqslant n_0$, on note $n_x = \lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, i.e. l'unique entier tel que $n_x \leqslant x < n_x + 1$. Montrer que :

$$\int_{n_0}^{n_x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{n_x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que l'intégrale généralisée

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si, et seulement si, la suite

$$\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \right)_{n \geqslant n_0}$$

converge.

c. Déduire des deux questions précédentes que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature.

2. **a.** Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^{\beta}}.$$

Indication. On pourra utiliser le changement de variable $u = \ln t$.

b. En déduire la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$$

en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$.

3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

a. Justifier que :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} \leqslant r_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}.$$

b. En déduire un équivalent de r_n lorsque $n \to \infty$.