Travaux dirigés

Intégrales généralisées

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

Thème 1

Question 1.a

Par décroissance de f sur $[n_0, +\infty[$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

l'inégalité de gauche étant valable pour tout $k \geqslant n_0$ et celle de droite pour tout $k \geqslant n_0 + 1$. En sommant l'inégalité de gauche pour k variant de n_0 à n et celle de droite pour k variant de $n_0 + 1$ à n, il vient pour $n \geqslant n_0$:

$$\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = f(n_0) + \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire, par relation de Chasles,

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Thème 1

Question 1.b

La positivité de f et les inégalités $n_x \leqslant x < n_x + 1$ expliquent que :

$$\int_{n_0}^{n_x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{n_x+1} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Par définition, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ entraîne celle de la suite de terme général

$$I_n = \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad n \geqslant n_0.$$

Pour la réciproque, on observe tout d'abord que n_x tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ puisque $n_x > x - 1$. Dans ces conditions, si la suite (I_n) converge vers ℓ, alors par composition I_{n_x} et I_{n_x+1} convergent également vers ℓ lorsque $x \to +\infty$. Les inégalités (1) assurent alors la convergence de $\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ vers ℓ lorsque $x \to +\infty$, ou en d'autres termes la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Thème 1

Question 1.c

La fonction f étant à valeurs positives, les suites (S_n) et (I_n) sont toutes deux croissantes ; prouver leur convergence revient donc à montrer qu'elles sont majorées. Or, d'après les inégalités de la question **a.**, si l'une est majorée, alors il en va de même de l'autre ; les deux suites (S_n) et (I_n) sont donc de même nature.

Vu la question **b.**, on en déduit que la série $\sum f(n)$ est convergente si, et seulement si, l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Thème 1

Question 2.a

Puisque la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$$

est continue et positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$, le changement de variable $u \longmapsto t = \mathbf{e}^u$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $[\ln 2, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$, ne change pas la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}.$$

Cette dernière est donc de même nature que l'intégrale de Riemann

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta},$$

i.e. convergente si, et seulement si, $\beta > 1$.

Thème 1

Question 2.b

Le résultat démontré en **1.c.** s'applique puisque la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$$

est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[\max(2, \mathbf{e}^{-\beta}), +\infty[$. La série

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$$

est donc de même nature que l'intégrale généralisée

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$$

c'est-à-dire, vu la question **a.**, convergente si, et seulement si, $\beta > 1$.

Thème 1

Question 3.a

La fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

étant continue, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$, on a par comparaison série-intégrale :

$$\forall k \geqslant 3, \qquad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où, pour $n \geqslant 2$ donné, en sommant membre à membre ces inégalités :

$$\forall N \geqslant n, \qquad \int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \int_{n}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ étant toutes deux convergentes d'après les questions **2.a.** et **2.b.**, on peut passer à la limite lorsque $N \to \infty$ dans les inégalités précédentes, ce qui conduit à :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} \leqslant r_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}. \tag{2}$$

Thème 1

Question 3.b

Pour $n \geqslant 2$ donné, on sait calculer les intégrales extrémales apparaissant dans l'inégalité précédente :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_n^{+\infty} = \frac{1}{\ln n}$$

d'où également

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \frac{1}{\ln(n+1)} \sim \frac{1}{\ln n}.$$

Dans ces conditions, on peut appliquer le théorème des gendarmes à l'inégalité (2) après avoir divisé chaque membre par $\frac{1}{\ln n}$, ce qui amène la conclusion :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \sim \frac{1}{\ln n}, \qquad n \to \infty.$$