Algèbre linéaire

Travaux dirigés

Thème 1 : Équations linéaires & théorème noyau-image

1. On se donne une application linéaire $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F ainsi qu'un vecteur $b \in \mathrm{F}$ et on considère l'*équation linéaire* associée $f(x) = b$, d'inconnue $x \in \mathrm{E}$.

a. Quel est l'ensemble des solutions lorsque l'équation est *homogène* i.e. lorsque $b = 0$?

b. Dans le cas général $b \in \mathrm{F}$, justifier que l'équation $f(x) = b$ est *compatible* (i.e. admet au moins une solution) si, et seulement si, $b \in \mathrm{Im}\, f$. Montrer dans ce cas que l'ensemble des solutions $f^{-1}(\{b\})$ est le sous-espace affine de E :

$$f^{-1}(\{b\}) = x_0 + \mathrm{Ker}\, f = \{x_0 + h\}_{h \in \mathrm{Ker}\, f},$$

où x_0 est une solution particulière de l'équation.

2. *Théorème noyau-image.*

a. Soient $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F ainsi qu'un supplémentaire H de $\mathrm{Ker}\, f$ dans E.
Montrer que f induit un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im}\, f$.

b. Dans quelle mesure le théorème précédent peut-il être intéressant lors de la résolution d'une équation linéaire $f(x) = b$?

c. Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Justifier que les supplémentaires de F dans E sont deux-à-deux isomorphes.

3. *Un exemple.* L'objectif est de déterminer les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + n + 3.$$

a. Justifier qu'il s'agit de résoudre une équation linéaire $f(x) = b$.

b. Résoudre l'équation homogène associée.

c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note π_k la suite $(n^k)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la famille $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note F_k le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ engendré par la famille $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k)$.

d. Pour $k \geqslant 2$ donné, montrer que le sous-espace F_k est stable par f puis déterminer l'image de l'endomorphisme induit par f sur F_k.

e. Répondre au problème initial.

4. *Interpolation de Lagrange.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et des scalaires $a_0, \ldots, a_n$ deux-à-deux distincts. L'objectif est de déterminer, en fonction de $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(a_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

a. Montrer que le problème se ramène à une équation linéaire.

b. Résoudre l'équation homogène associée et justifier qu'il existe dans le sous-espace $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ une unique solution au problème initial.

c. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, expliciter le polynôme $\mathrm{L}_j \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{L}_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

d. Expliciter tous les polynômes P solutions du problème initial.

Thème 2 : Image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$

On considère l'application $f : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \qquad f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'' - \mathrm{X}\mathrm{P}'.$$

1. a. Montrer que l'application f est linéaire.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $f(\mathrm{X}^n)$. En déduire, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, le degré de $f(\mathrm{P})$ et son coefficient dominant en fonction de ceux de P.

c. Déterminer le noyau de f.

d. L'application f est-elle surjective ?

2. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit pair (resp. impair) si ses coefficients de degrés impairs (resp. pairs) sont nuls. On note V (resp. W) l'ensemble des polynômes pairs (resp. impairs) de $\mathbb{R}[X]$.

a. Montrer que

$$P \in V \quad \Longleftrightarrow \quad P(-X) = P(X)$$

et

$$P \in W \quad \Longleftrightarrow \quad P(-X) = -P(X).$$

b. Justifier que les sous-espaces V et W sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

c. Montrer que les sous-espaces V et W sont stables par f.

3. Soit g l'endomorphisme de W induit par f.

a. Déterminer le noyau de g. L'endomorphisme g est-il injectif ? Le théorème de « surjectivité automatique » s'applique-t-il ?

b. Montrer que l'application g est surjective.
Indication. On pourra montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que le sous-espace $W_n = W \cap \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ est inclus dans $\operatorname{Im} g$ en considérant l'endomorphisme g_n induit par g sur W_n.

c. Résoudre l'équation $f(P) = X^k$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$ pour $k \in \{1, 3, 5\}$.

4. On cherche à présent à déterminer l'image de f. Pour cela, on se donne une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ non nulle et on introduit l'application

$$\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k P^{(k)}(0).$$

a. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, justifier que le réel $\varphi(P)$ est bien défini et l'exprimer en fonction des coefficients de P.

b. Montrer que φ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer la dérivée k-ième du polynôme $f(P)$ en fonction des dérivées successives de P. En déduire que :

$$\varphi\big(f(P)\big) = -\lambda_1 P'(0) + \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_{k-2} - k\lambda_k) P^{(k)}(0).$$

d. Montrer que l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} \varphi$ équivaut à une condition initiale et une relation de récurrence sur la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

e. Montrer enfin que :

$$\operatorname{Im} f = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0 \right\}.$$

Indication. On pourra s'inspirer de la démarche de la question **3.b.**.