Travaux dirigés

Intégrales généralisées

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

Thème 1

Question 1.a

Il s'agit du noyau de f.

Thème 1

Question 1.b

Il est clair que l'équation $f(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution si, et seulement si, $b \in \operatorname{Im} f$.

Dans ce cas, étant donné une solution x_0 de l'équation, on a pour $x \in E$:

$$\begin{aligned} f(x) = b \quad &\iff \quad f(x) = f(x_0) \quad \iff \quad f(x - x_0) = 0 \\ &\iff \quad h = x - x_0 \in \operatorname{Ker} f \quad \iff \quad \exists h \in \operatorname{Ker} f, x = x_0 + h. \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation complète s'obtient donc en faisant la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation homogène.

Thème 1

Question 2.a

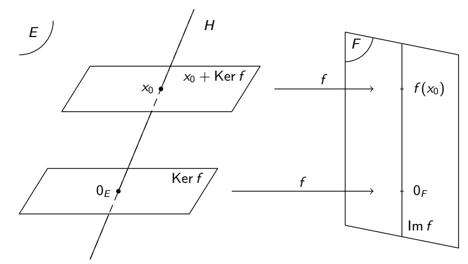
La restriction de f à H est une application linéaire de H dans F, dont l'image est incluse dans $\operatorname{Im} f$. Elle induit donc une application linéaire $\widetilde{f} : H \longrightarrow \operatorname{Im} f$ (définie par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in H$). Il s'agit de montrer que $\widetilde{f}$ est un isomorphisme.

- On a $\operatorname{Ker} \widetilde{f} = (\operatorname{Ker} f) \cap H$. En effet, un élément $x \in E$ appartient à $\operatorname{Ker} \widetilde{f}$ si, et seulement si, $x \in H$ et $\widetilde{f}(x) = 0$, mais $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in H$... Comme $\operatorname{Ker} f$ et H sont supplémentaires par hypothèse, on a donc $\operatorname{Ker} \widetilde{f} = \{0\}$ ce qui assure l'injectivité de $\widetilde{f}$.
- Pour $y \in \operatorname{Im} f$ donné, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Décomposant cet élément x selon la somme $E = H + \operatorname{Ker} f$, il vient $x = x' + x''$ pour $(x', x'') \in H \times \operatorname{Ker} f$. On a alors $y = f(x) = f(x') = \widetilde{f}(x')$. Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ est surjective, ce qui achève la démonstration.

Thème 1

Question 2.b

D'après la question **1.b.**, une fois connus le noyau et l'image de f, il ne reste plus dans le cas compatible qu'à déterminer une solution particulière de l'équation complète pour en déduire sa solution générale. D'après la question **a.**, une telle solution particulière peut être trouvée dans n'importe quel supplémentaire H de $\operatorname{Ker} f$ dans E.



Thème 1

Question 2.c

Si G et H sont deux supplémentaires de F dans E, le projecteur p de E sur G parallèlement à F est une application linéaire de noyau F, dont H est un supplémentaire, et d'image G. D'après le théorème noyau-image, p induit donc un isomorphisme de H sur G.

Thème 1

Question 3.a

Il s'agit de résoudre l'équation $f(u) = v$ d'inconnue $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où

$$f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \longmapsto (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

et $v = (n+3)_{n \in \mathbb{N}}$. Elle est linéaire car f est linéaire.

Thème 1
Question 3.b

Les solutions de l'équation homogène $f(u) = 0$ sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

Il s'agit des suites de la forme

$$(\lambda n + \mu)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(1)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Thème 1
Question 3.c

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{r} a_k \pi_k = 0$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{r} a_k n^k = 0.$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$, qui admet alors une infinité de racines, est nécessairement nul : $a_0 = \cdots = a_r = 0$, d'où le résultat.

Thème 1
Question 3.d

On a déjà vu que $f(\pi_0) = f(\pi_1) = 0$. Pour $2 \leqslant j \leqslant k$, le binôme de Newton donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)^j - 2(n+1)^j + n^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (2^{j-i} - 2) n^i + n^j$$

où le terme d'indice $i = j$ de la somme est compensé par le terme isolé n^j, et celui d'indice $i = j - 1$ est nul. Il en ressort que $f(\pi_j) \in F_{k-2} \subset F_k$ pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, si bien que F_k est stable par f, et que f induit sur F_k un endomorphisme f_k à valeurs dans F_{k-2}.
Par ailleurs, d'après **c.** et le théorème du rang,

$$\operatorname{rg} f_k = \dim F_k - \dim \operatorname{Ker} f_k = \dim F_k - \dim F_1 = k - 1 = \dim F_{k-2}.$$

De l'inclusion avec égalité des dimensions, on peut alors conclure que f_k admet pour image $\operatorname{Im} f_k = F_{k-2}$.

Thème 1
Question 3.e

Puisque $v = (n+3)_{n\in\mathbb{N}} \in F_1 = \operatorname{Im} f_3$, le théorème noyau-image indique qu'on peut trouver une (unique) solution particulière de l'équation complète dans le sous-espace $\operatorname{Vect}(\pi_2, \pi_3)$, supplémentaire de $\operatorname{Ker} f_3$ dans F_3.
On cherche donc $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme $u = \alpha\pi_3 + \beta\pi_2 = (\alpha n^3 + \beta n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Le calcul donne

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n &= \alpha\big((n+2)^3 - 2(n+1)^3 + n^3\big) + \\ &\quad + \beta\big((n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2\big) \\ &= \alpha(6n+6) + 2\beta = 6\alpha n + 6\alpha + 2\beta\end{aligned}$$

et il suffit donc de choisir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} 6\alpha = 1 \\ 6\alpha + 2\beta = 3 \end{cases} \iff (\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{6}, 1\right).$$

L'équation complète admet donc pour solution générale :

$$\left(\frac{n^3}{6} + n^2 + \lambda n + \mu\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Thème 1
Question 4.a

Pour $\Lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ donné, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ satisfait la propriété

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(a_i) = \lambda_i \qquad (\star)$$

si, et seulement si, il est solution de l'équation linéaire $\varphi(P) = \Lambda$, où φ est l'application linéaire définie par :

$$\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}, P \longmapsto \big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\big).$$

Thème 1
Question 4.b

Le noyau de φ est constitué des polynômes P dont les scalaires deux-à-deux distincts $a_0, \dots, a_n$ sont racines, i.e. des multiples de $N = \prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$: $\operatorname{Ker}\varphi = N\mathbb{K}[X]$.
Le polynôme N étant de degré $n+1$, le sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ consitue un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\varphi$ dans $\mathbb{K}[X]$. Le théorème noyau-image s'applique : l'application linéaire φ induit un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\operatorname{Im}\varphi$.
Il ne reste qu'à montrer que φ est surjective pour justifier que l'équation est compatible. Or l'image de φ, dont on a vu qu'elle est isomorphe à $\mathbb{K}_n[X]$, est un sous-espace de dimension $n+1$ de $\mathbb{K}^{n+1}$, d'où le résultat.

Thème 1
Question 4.c

La condition $L_j(a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!] \setminus \{j\}$ traduit la divisibilité de L_j par le polynôme $\prod_{i\neq j}(X - a_i)$ de degré n, i.e. l'existence d'un polynôme nécessairement constant, c'est-à-dire d'un scalaire α_j tel que $L_j = \alpha_j \prod_{i\neq j}(X - a_i)$. La condition $L_j(a_j) = 1$ s'écrit alors

$$\alpha_j = \frac{1}{\prod_{i\neq j}(a_j - a_i)}.$$

On en déduit l'expression de

$$L_j = \prod_{i\neq j} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}.$$

Thème 1
Question 4.d

En notant ψ l'isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$ induit par l'application linéaire φ définie et $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, on a pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $L_j = \psi^{-1}(e_j)$.
Par linéarité de ψ^{-1}, on en déduit que pour $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ donné, le polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(a_i) = \lambda_i \qquad (\star)$$

est donné par

$$P = \psi^{-1}(\Lambda) = \psi^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j e_j\Big) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \psi^{-1}(e_j) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \prod_{i\neq j} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}.$$

Pour $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, la théorie des équations linéaires et la question **b.** assurent que les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ satisfaisant la condition $(\star)$, sans restriction sur leur degré, sont les polynômes

$$P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j + Q \prod_{j=0}^{n}(X - a_j), \qquad Q \in \mathbb{K}[X].$$