Suites et fonctions d'une variable

Travaux dirigés

Thème 1 : Démonstration du théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telles que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$.

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et en déduire que $u_p \leqslant v_q$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.

2. Justifier que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune.

Thème 2 : Théorème des segments emboîtés et applications

1. Démontrer le théorème des segments emboîtés qui s'énoncé comme suit : Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments emboîtés au sens où $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $b_n - a_n$ tend vers 0, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ se compose d'un unique réel.

Les deux questions suivantes proposent des applications du théorème des segments emboîtés.

2. On souhaite démontrer par l'absurde que $[0, 1]$ (donc a fortiori $\mathbb{R}$) n'est pas dénombrable, i.e. qu'on ne peut pas en énumérer les éléments. On suppose donc l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prenant toutes les valeurs de l'intervalle $[0, 1]$.
Construire une suite (J_n) de segments emboîtés telle que $u_n \notin \mathrm{J}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et obtenir une contradiction.

3. On souhaite démontrer le théorème des bornes atteintes, qui énonce que toute fonction réelle f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

a. Justifier qu'il suffit de montrer que f admet un maximum.

b. On dit qu'un segment $[\alpha, \beta]$ de $[a, b]$ est *dominant* si :

$$\forall x \in [a, b], \quad \exists \xi \in [\alpha, \beta], \quad f(\xi) \geqslant f(x).$$

Montrer qu'étant donnés un segment $[\alpha, \beta]$ dominant et un réel $\gamma \in \,]\alpha, \beta[$, au moins l'un des segments $[\alpha, \gamma]$ et $[\gamma, \beta]$ est dominant.

c. Conclure.

Thème 3 : Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$.

1. Soit $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ un intervalle que l'on suppose stable par f : $f(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$, i.e. $f(x) \in \mathrm{J}$ pour tout $x \in \mathrm{J}$.

a. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{J}$, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que s'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $u_\mathrm{N} \in \mathrm{J}$, alors $u_n \in \mathrm{J}$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$.

Dans toute la suite, on suppose que l'intervalle I est stable par f et l'on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathrm{I}$, alors ℓ est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$.

b. Quelles sont les seules limites *éventuelles* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c. Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}.$$

3. a. Montrer que si f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b. Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de $u_0 \geqslant 0$.

4. a. Montrer que si f est décroissante, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.
Indication. On pourra chercher une relation de récurrence pour chacune de ces suites.

b. Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = \cos u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. a. On suppose dans cette question que f est dérivable et qu'il existe $k < 1$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ (on dit que f est *contractante*).
Montrer que si ℓ est point fixe de f, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$$

et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

b. Retrouver la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+1} = \cos u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. On considère pour finir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et de la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ pour tout $x > 0$.

a. Justifier qu'il existe une unique limite finie ℓ *possible* pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Justifier qu'il existe $m > 1$ et $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \subset \mathbb{R}_+^*, \quad |f'(x)| \geqslant m.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

c. Préciser le comportement des sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Thème 4 : Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a < b$ réels). On souhaite démontrer que pour toute valeur γ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

1. Justifier qu'il suffit de traiter le cas $\gamma = 0$.

On suppose donc $f(a)f(b) < 0$ et $\gamma = 0$ dans la suite de l'exercice.

2. *Première méthode : démonstration par dichotomie*

a. Construire un couple de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes telles que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Conclure.

3. *Deuxième méthode : utilisation d'une borne supérieure*

a. Justifier l'existence de $c = \inf\{x \in [a, b] : f(a)f(x) < 0\}$.

b. En raisonnant par l'absurde, justifier que $f(a)f(c) \geqslant 0$.

c. Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ convergeant vers c telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a)f(x_n) < 0$. En déduire que $f(a)f(c) \leqslant 0$.

d. Conclure.