Travaux dirigés

Suites et fonctions d'une variable

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

Thème 2

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'inclusion $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ s'écrit
$$\begin{cases} a_{n+1} \geqslant a_n \\ b_{n+1} \leqslant b_n \end{cases}.$$
Avec l'hypothèse selon laquelle $b_n - a_n$ tend vers 0, les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Par conséquent, elles convergent vers une limite commune ℓ.
On vérifie alors par double inclusion que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}.$$

Thème 2

Question 2

On construit une telle suite par récurrence. On choisit d'abord un segment J_0 non trivial (i.e. non réduit à un point) ne contenant pas u_0. En supposant, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, les segments $J_k = [a_k, b_k]$ construits pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ tels que $u_k \notin J_k$, au moins l'un des trois segments
$$\left[a_n, a_n + \frac{b_n - a_n}{3}\right], \quad \left[a_n + \frac{b_n - a_n}{3}, a_n + 2\frac{b_n - a_n}{3}\right] \quad \text{et} \quad \left[a_n + 2\frac{b_n - a_n}{3}, b_n\right],$$
tous de longueur $\frac{b_n - a_n}{3}$ et qui recouvrent $J_n = [a_n, b_n]$, ne contient pas u_{n+1} ; on choisit J_{n+1} parmi eux, ce qui achève la « construction » de la suite.
On observe lors la construction précédente que la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3} \in [0, 1[$; elle converge donc vers 0.
En vertu du théorème des segments emboîtés, il existe alors ℓ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = \{\ell\}$. Ce réel ℓ ne peut être un terme de la suite (u_n) puisqu'aucun d'eux n'appartient par construction à tous les segments J_n, $n \in \mathbb{N}$.

Thème 2

Question 3.a

En appliquant le résultat supposé connu pour le maximum à $-f$, on justifie que f est minorée et admet un minimum.

Thème 2

Question 3.b

Soient $[\alpha, \beta]$ un segment dominant et $\gamma \in]\alpha, \beta[$. On raisonne par l'absurde : si aucun des segments $[\alpha, \gamma]$ et $[\gamma, \beta]$ n'était dominant, alors il existerait $x, y \in [a, b]$ tel que
$$\forall \xi \in [\alpha, \gamma], \quad f(\xi) < f(x) \qquad \text{et} \qquad \forall \xi \in [\gamma, \beta], \quad f(\xi) < f(y).$$
Mais alors, en notant $z \in \{x, y\}$ tel que $f(z) = \max\{f(x), f(y)\}$, on aurait
$$\forall \xi \in [\alpha, \beta], \quad f(\xi) < f(z),$$
ce qui contredirait le caractère dominant du segment $[a, b]$. D'où le résultat.

Thème 2

Question 3.c

Il ressort en particulier de la question **b.** qu'étant donné un segment dominant, sa moitié gauche ou sa moitié droite est dominante. Cette observation permet de construire par récurrence, comme en **2.**, une suite (J_n) de segments dominants emboîtés dont les longueurs forment une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Le théorème des segments emboîtés garantit alors l'existence d'un réel $\ell \in [a, b]$ tel que $\bigcap_n J_n = \{\ell\}$.
Pour $x \in [a, b]$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un réel $\xi_n \in J_n$ tel que $f(\xi_n) \geqslant f(x)$ puisque J_n est dominant. La suite (ξ_n) converge nécessairement vers ℓ de sorte que $\big(f(\xi_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$ par continuité de f. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient donc $f(\ell) \geqslant f(x)$. L'inégalité étant valable pour tout $x \in [a, b]$, cela prouve que f admet en ℓ un maximum sur $[a, b]$.

Thème 3

Question 1.a

Unicité. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui conviennent, on démontre que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
Existence. On démontre par récurrence que les n premiers termes de la suite sont bien définis et appartiennent à J pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Thème 3

Question 1.b

Récurrence immédiate.

Thème 3

Question 2.a

Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$ par continuité de f sur I (donc en ℓ). Dans ce cas, on obtient $f(\ell) = \ell$ par passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Thème 3

Question 2.b

La limite d'une suite convergente d'éléments de I peut appartenir à I mais aussi être une borne de I. D'après la question précédente, les seules limites éventuelles de (u_n) sont donc les points fixes de f sur I et les bornes de I (on peut même préciser : celles qui n'appartiennent pas à I).

On peut déterminer si la fonction f admet des points fixes, leur nombre et les estimer en étudiant la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$.

Thème 3

Question 2.c

La fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1+x}{1-x}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ses variations sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	0	1		$+\infty$
f	-1 ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$ ‖	$-\infty$ ↗	-1

On observe que $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ est une partie stable. La suite est donc bien définie si, et seulement si, $u_0 \notin \{-1, 0, 1\}$.

On observe sur le tableau de variations précédent que f n'admet aucun point fixe sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Les seules limites éventuelles sont donc $-\infty$, -1, 0, 1 et $+\infty$.

- f étant continue en -1 et 0 sans y admettre de point fixe, ces réels ne peuvent pas être limite de (u_n).
- Si (u_n) tend vers $\pm\infty$, alors
$$u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n} \sim \frac{u_n}{-u_n} \to -1,$$
ce qui est absurce. Ceci exclut donc que $\pm\infty$ soient limites.
- Enfin, si (u_n) tend vers 1, alors
$$|u_{n+1}| = \left|\frac{1+u_n}{1-u_n}\right| \to +\infty,$$
ce qui est également absudre et 1 ne peut donc pas non plus être limite.

En conclusion, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

Thème 3

Question 3.a

Si f est croissante alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est du signe de $u_{n+1} - u_n$. Ainsi la différence $u_{n+1} - u_n$ garde un signe constant et la suite (u_n) est monotone. Son sens de variation est donné par le signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = g(u_0)$, si l'on définit la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$.

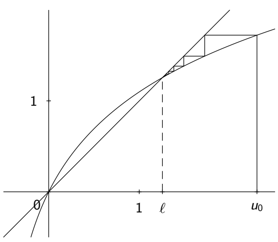
Thème 3

Question 3.b

La fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + 2x)$ est continue et croissante sur l'intervalle stable $[0, +\infty[$. La suite (u_n) est donc bien définie et monotone pour $u_0 \geqslant 0$.
Les variations de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	0	$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
g	0 ↗	> 0 ↘	0 ↘	$-\infty$

La fonction f admet donc deux points fixes : 0 et α, sur $[0, +\infty[$. D'où trois limites possibles pour (u_n) : 0, α et $+\infty$.



Le sens de variation de (u_n) est donné par le signe de $g(u_0)$, ce qui amène à distinguer les cas suivants :

- si $u_0 = 0$, alors la suite est constante nulle.
- si $0 < u_0 \leqslant \alpha$, alors la suite (u_n) est croissante. Par ailleurs, son premier terme est dans l'intervalle stable $[0, \alpha]$, ce qui est donc aussi le cas de tous les autres termes. La suite (u_n) est ainsi croissante et majorée donc convergente. Les limites éventuelles 0 et $+\infty$ doivent être écartées. La suite (u_n) converge donc vers α.
- si $\alpha \leqslant u_0$, alors la suite (u_n) est décroissante, et par ailleurs minorée par α car à termes dans l'intervalle stable $[\alpha, +\infty[$. Elle est donc convergente vers la seule limite possible α.

Thème 3

Question 4.a

Les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont récurrentes associées à la fonction $F = f \circ f$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f\big(f(u_{2n})\big) = F(v_n)$$

et de même pour (w_n). La fonction F étant croissante (comme composée de deux fonctions décroissantes), ces deux suites (v_n) et (w_n) sont monotones, de sens contraires car donnés respectivement par les signes de $v_1 - v_0$ et $w_1 - w_0 = f(v_1) - f(v_0)$, opposés puisque f est décroissante.

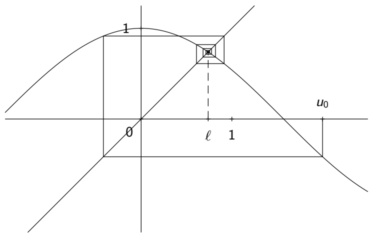
Thème 3

Question 4.b

L'intervalle $\mathbb{R}$ est stable par $f = \cos$ mais la fonction f n'y est pas monotone...
Cependant, $u_1 = \cos u_0 \in [-1, 1]$ puis $u_2 \in [0, 1]$ et, comme l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ prend ses termes dans l'intervalle stable $[0, 1]$ sur lequel f est décroissante. Les suites $(u_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ sont donc monotones de sens contraires ; étant de plus toutes deux bornées, elles sont convergentes.

Par ailleurs, l'étude de la fonction $x \longmapsto \cos x - x$ montre que la fonction f présente un unique point fixe α dans l'intervalle $[0, 1]$, qui constitue donc la seule limite possible pour (u_n).
Mais les limites éventuelles des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont à rechercher parmi les points fixes de... $F = f \circ f$! Il est clair que α est point fixe de F et l'étude de $x \longmapsto F(x) - x$ montre que c'est le seul sur $[0, 1]$.

Ainsi les deux suites extraites principales (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite α, ce qui entraine la convergence de la suite complète (u_n) vers α.



Thème 3

Question 5.a

S'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout $x \in I$, alors l'inégalité des accroissements finis s'applique à la fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et assure que :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant k\,|y - x|\,.$$

En appliquant l'inégalité précédente à $x = \ell$ point fixe de f et $y = u_n$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k\,|u_n - \ell|\,.$$

Il en résulte par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puisque $0 \leqslant k < 1$, d'où l'on déduit par encadrement que (u_n) converge vers ℓ.

Thème 3

Question 5.b

La fonction $f = \cos$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $|f'(x)| = |\sin x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais on ne peut trouver de majorant $k < 1$...

Néanmoins, comme on l'a vu dans la question **4.b.**, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ stable, et l'on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| = \sin x \leqslant k = \sin 1 < 1.$$

On peut donc appliquer le résultat de la question **a.** : la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe α de la fonction cos sur $[0, 1]$, dont l'existence a été établie en **4.a.**.
On peut même ajouter grâce à cette méthode que $u_n = \alpha + \mathscr{O}(k^n)$.

Thème 3

Question 6.a

La suite (u_n) est bien définie car l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par la fonction $f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

Les points fixes de f sont les points en lesquels la fonction $x > 0 \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$ prend la valeur 1. Or celle ci est continue et strictement croissante, de limites 0 et $+\infty$ en 0 et $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même et la fonction f présente donc un unique point fixe α.

La convergence de la suite (u_n) ne peut avoir lieu que vers 0 ou le seul point fixe α de f. Mais il est impossible que (u_n) tende vers 0, sans quoi

$$u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

ce qui est absurde.
La seule limite finie possible pour (u_n) est donc α.

Thème 3

Question 6.b

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{(1+x)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

En particulier pour $x = \alpha$, on a $f'(\alpha) = -(1 + \alpha)$ donc $|f'(\alpha)| > 1$. Étant donné $m \in]1, |f'(\alpha)|[$, la continuité de f' en α assure donc l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \cap \mathbb{R}_+^*, \quad |f'(x)| \geqslant m.$$

On peut considérer $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Il résulte alors du théorème des accroissements finis que :

$$\forall x, y \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon], \quad |f(y) - f(x)| \geqslant m\,|y - x|\,.$$

En effet, pour de tels réels x et y, il existe $z \in [x, y]$ tel que :

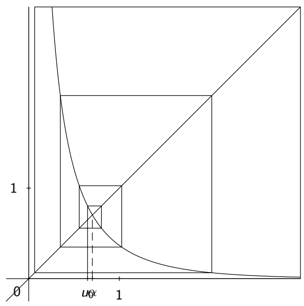
$$|f(y) - f(x)| = |f'(z)|\,|y - z| \geqslant m\,|y - z|\,.$$

- Si $u_0 = \alpha$, alors la suite (u_n) est constante donc convergente de limite α.
- On suppose à présent $u_0 \neq \alpha$. On a alors $u_n \neq \alpha$ puisque f est strictement décroissante donc injective sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Si la suite (u_n) convergeait vers α, il existerait un entier N tel que $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On aurait donc :
  $$\forall n \geqslant N, \quad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \geqslant m\,|u_n - \alpha|$$
  et donc, par une récurrence immédiate,
  $$\forall n \geqslant N, \quad |u_n - \alpha| \geqslant m^{n-N}\,|u_N - \alpha| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$
  ce qui serait contradictoire avec la convergence de (u_n) vers α.
  Ainsi la suite (u_n) ne peut converger vers α. Elle est donc divergente d'après la question **a.**.

Thème 3

Question 6.c

Puisque la fonction f est décroissante sur l'intervalle stable $]0, +\infty[$, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires et admettent donc chacune une limite.
Un petit calcul algébrique montre que tout point fixe de $f \circ f$ est aussi point fixe de f. Ainsi α est le seul point fixe de $f \circ f$ et les seules limites possibles pour (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc 0, α et $+\infty$.
Or $|(f \circ f)'(\alpha)| = |f'(\alpha)|^2 > 1$ et le même raisonnement qu'en **b.** montre qu'à moins d'avoir $u_0 = \alpha$, aucune des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne peut converger vers α.
En conclusion, l'une des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) converge en décroissant vers 0 alors que l'autre diverge en croissant vers $+\infty$, en accord avec le diagramme page suivante.



Thème 4

Question 1

Le cas général se ramène au cas particulier en considérant la fonction continue $g = f - \gamma$: un antécédent de 0 pour g est un antécédent de γ pour f.

Thème 4

Question 2.a

On construit classiquement ces suites par récurrence.
On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ puis, en supposant pour $n \in \mathbb{N}$ donné $a_0, \dots, a_n$, $b_0, \dots, b_n$ construits tels que $f(a_k)f(b_k) \leqslant 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on considère $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

- Si $f(a_n)f(m_n) \leqslant 0$, on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, m_n)$.
- Sinon, on a alors $f(m_n)f(b_n) \leqslant 0$ vu l'hypothèse de récurrence, et l'on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (m_n, b_n)$.

On observe dans la construction précédente que la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0, 1[$ donc converge vers 0, de sorte que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Thème 4

Question 2.b

Les suites adjacentes de la question **a.** convergent vers une limite commune ℓ qui vérifie $f(\ell)^2 \leqslant 0$ compte-tenu de la continuité de f. Il en ressort que $f(\ell) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Thème 4

Question 3.a

L'ensemble $C = \{x \in [a, b] : f(a)f(x) < 0\}$ est une partie non vide (elle contient b par hypothèse) et minorée (par a) de $\mathbb{R}$, qui admet donc une borne inférieure.

Thème 4

Question 3.b

Si l'on avait $f(a)f(c) < 0$ alors la continuité de f au point c garantirait l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \cap [c - \varepsilon, c], \quad f(a)f(c) < 0,$$

ce qui viendrait contredire la définition de c.

Thème 4

Question 3.c

D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de C qui converge vers c. On a donc $f(a)f(x_n) < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis, par passage à la limite, $f(a)f(c) \leqslant 0$ compte-tenu de la continuité de f.

Thème 4

Question 3.d

Il ressort de **b.** et **c.** que $f(a)f(c) = 0$ puis, comme $f(a) \neq 0$ par hypothèse, que $f(c) = 0$, ce qui achève la démonstration.