

Révisions

Feuille d'exercices

1 ECRICOME 2007

1. À l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que :

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$v_n = \ln\left(2 - e^{1/n}\right), \quad V_n = \sum_{k=2}^n v_k \quad \text{et} \quad u_n = \exp V_n.$$

a. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

b. Déterminer les limites des suites (V_n) et (u_n) .

3. a. Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left(\ln\left(2 - e^{1/k}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right).$$

b. Déterminer un équivalent, lorsque $n \rightarrow \infty$, de

$$\ln\left(2 - e^{1/n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

c. En déduire qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $u_n \sim \kappa/n$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

4. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

2 EMLYON 2002

On admet que la suite de terme général

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

converge vers une constante γ (appelée *constante d'Euler*) dont on va établir une expression intégrale.

1. a. Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x.$$

b. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \in [0, n]$, les inégalités suivantes :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

puis :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

2. a. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (1-x)^n + nx - 1 \geq 0.$$

b. En utilisant 1.b. et a., montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, n], \quad 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

3. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt.$$

b. Établir que I_n tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

4. a. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n(a_n + \ln n).$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de

$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt$$

et montrer que $J_n = a_n + \ln n$.

5. On note :

$$U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

a. Justifier l'existence de U et V.

b. Démontrer que $\gamma = U - V$.

3 ECRICOME 2010

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}} \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1 - u} du.$$

1. a. Vérifier que :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t \in [0, 1[, \quad \frac{1}{1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}} - (1 - t) = \frac{(1 - t)t^n}{1 - t^n}.$$

En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

b. En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. a. Pour tout entier $k \geq 1$, calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^k}{x - 1}.$$

b. Pour $k \geq 1$ entier, prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1} dx.$$

c. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - e^{2x}$ en 0 à l'ordre 1, montrer que :

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad |e^x - e^{2x} + x| \leq \frac{3x^2}{2}.$$

3. a. En utilisant la question 2., montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \left| v_n + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du \right| \leq \frac{3}{2n^2} \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u} du.$$

b. Donner alors un équivalent de v_n puis de $u_n - \frac{1}{2}$ en fonction de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u} du,$$

que l'on ne cherchera pas à calculer.

4 1. Nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{|\ln t|}} dt \quad \int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{t^3 + t} - t) dt.$$

♣ 2. Démontrer la convergence de l'intégrale généralisée ci-dessous puis la calculer grâce au changement de variable $u = t + \sqrt{t^2 - 1}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{t^2 - 1} - 1}.$$

3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\ln n! \sim n \ln n$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

5 EMLYON 2006

Soit un entier $n \geq 2$. On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$.

On considère un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de \mathbb{C}^n et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

On appelle *matrice compagnon* du polynôme P la matrice C de $M_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & (0) & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à C , i.e. l'endomorphisme représenté par C dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{C}^n . On note f^k , $k \in \mathbb{N}$, les itérés de f . En particulier, $f^0 = \text{id}$ désigne l'endomorphisme identité de \mathbb{C}^n .

1. a. Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1} .
- b. En déduire que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad f^j(e_1) = e_{j+1}$$

et :

$$f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-1} e_n).$$

2. Soit g l'endomorphisme de \mathbb{C}^n défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0 \text{id}$.

- a. Vérifier que $g(e_1) = 0$.
- b. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.
- c. En déduire que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_i) = 0$.
- d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f .

Application 1 : déterminer une matrice $A \in M_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P .

3. a. Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$. On note $Q(f)$ l'endomorphisme de \mathbb{C}^n défini par $Q(f) = \alpha_0 \text{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$.

Calculer $Q(f)(e_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f .

c. Soit λ une racine du polynôme P . Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$.

Vérifier que $(f - \lambda \text{id}) \circ R(f)$ est l'endomorphisme nul de \mathbb{C}^n .

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C .

4. a. Montrer que, pour tout nombre complexe x , la matrice $C - xI_n$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si, et seulement si, P admet n racines deux-à-deux distinctes.

5. a. *Application 2* : montrer que la matrice A_1 ci-dessous est diagonalisable :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

b. *Application 3* : montrer que la matrice A_2 ci-dessous n'est pas diagonalisable :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

www.rblid.fr

6. On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C .
- Montrer que, pour tout nombre complexe t , la matrice $B - tI_n$ est inversible si, et seulement si, la matrice $C - tI_n$ est inversible.
 - En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.
 - Soit λ une valeur propre de B . Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ .
 - On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux-à-deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice V ci-dessous (dite de Vandermonde) est inversible :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

7. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres μ_1, \dots, μ_n deux-à-deux distinctes.
- Justifier qu'il existe une base $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés aux valeurs propres μ_1, \dots, μ_n .
 - Soit $a = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E .
 - Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base \mathcal{B}_a soit la matrice compagnon du polynôme P_1 .

6 EMLYON 2014

Soit $n \geq 2$ entier. On note $(V_i)_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les matrices $E_{i,j} = V_i {}^tV_j$, $1 \leq i, j \leq n$, forment la base canonique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A \neq \lambda I_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'application $\Phi_A : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA.$$

1. Quelques généralités

- Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
- Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif? surjectif?

2. Étude d'un cas particulier

On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les valeurs propres de A .
- Écrire la matrice de Φ_A dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ puis calculer le rang de cette matrice.
- Déterminer les valeurs propres de Φ_A et montrer que Φ_A est diagonalisable.

3. Étude du cas où A est diagonalisable

On suppose, dans cette question seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que tA est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que A et tA ont les mêmes valeurs propres.
- Soient $X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de tA). Montrer que $X {}^tY$ est un vecteur propre de Φ_A .
- Soient (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) deux bases de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note \mathcal{F} la famille $\mathcal{F} = (X_i {}^tY_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V_i {}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par \mathcal{F} et en déduire que la famille \mathcal{F} est une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
- Établir que Φ_A est diagonalisable.
- Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A .

4. Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $T \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.

- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$.
- En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^q = 0$ et $q \leq n^2$.

On note p l'entier de \mathbb{N}^* tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.

- Justifier qu'il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X = 0$. Montrer que la famille $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ est libre dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en déduire que $p \leq n$.

5. Étude du cas où A est symétrique

On suppose, dans cette question seulement, que la matrice A est symétrique ; il existe donc une matrice $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. On note C_1, \dots, C_n les colonnes de P .

On considère le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que :

$$\forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M, N \rangle = \langle M {}^tN, I_n \rangle.$$

- Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer ${}^tC_i C_j$.
- Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $C_i {}^tC_j$ et en déduire la valeur de $\langle C_i {}^tC_j, I_n \rangle$.
- Pour $i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $\langle C_i {}^tC_j, C_k {}^tC_\ell \rangle$.
- On considère la famille $\mathcal{G} = (C_i {}^tC_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que \mathcal{G} est une base orthonormale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de Φ_A . Est-ce cohérent avec les résultats établis dans les questions précédentes ?

- 7 On considère la fonction g définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$g : x \longmapsto \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

1. Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par

$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

a. On admet que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Étudier la nature des intégrales $\int_{-1}^0 f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

2. a. Vérifier que la fonction g , définie dans le préambule, est définie sur $] -1, +\infty[$. Justifier sa continuité en -1 .

b. Montrer que g est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et préciser sa dérivée sur cet intervalle.

c. En admettant que $g(1) = \frac{\pi^2}{12}$, montrer que la fonction

$$x \mapsto g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et préciser sa valeur.

d. En déduire un équivalent simple de $g(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On considère l'ensemble E des fonctions u continues sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{u(t)^2}{1+t^2} dt$$

converge.

3. a. Montrer que, pour $u, v \in E$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{u(t)v(t)}{1+t^2} dt$$

converge absolument.

b. Montrer que E est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

c. Montrer que l'application

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{u(t)v(t)}{1+t^2} dt$$

définit un produit scalaire sur E .

Dans la suite de cette partie, l'espace E est muni de la structure préhilbertienne induite par ce produit scalaire.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $h_k : t \in]0, +\infty[\mapsto (\ln t)^k$.

a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_k(t)}{1+t^2} dt$$

converge absolument.

On admettra que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = \frac{\pi^3}{8}.$$

b. En déduire que g est un élément de E et que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt$$

converge absolument.

c. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction h_k est élément de E et que, si j et k sont deux entiers dont la somme $j+k$ est impaire, alors $\langle h_j, h_k \rangle = 0$.

Indication. On pourra utiliser le changement de variable $x = 1/t$.

5. Soit s l'application qui, à un élément u de E , associe la fonction $s(u)$ définie sur $]0, +\infty[$ par la formule

$$s(u) : t \mapsto u\left(\frac{1}{t}\right).$$

a. Montrer que s est une involution linéaire (i.e. une symétrie vectorielle) de E .

b. En déduire que les sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{ u \in E : \forall t > 0, u\left(\frac{1}{t}\right) = u(t) \right\}$$

et

$$G = \left\{ u \in E : \forall t > 0, u\left(\frac{1}{t}\right) = -u(t) \right\}$$

sont supplémentaires dans E .

c. Montrer que :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle s(u), s(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

d. En déduire que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.

Dans ces conditions, bien que l'espace E ne soit pas de dimension finie, le sous-espace $F^\perp \supset G$ est supplémentaire de F dans E et l'on dit que s est la symétrie orthogonale par rapport à F . On définit, comme en cours, la projection orthogonale p sur le sous-espace F .

6. a. Quelle formule relie s et p ?

b. En déduire que le projeté orthogonal de g sur F s'écrit $p(g) = \alpha h_0 + \beta h_2$ pour deux réels α et β que l'on déterminera.

7. Justifier que $\langle h_0, g - \alpha h_0 - \beta h_2 \rangle = 0$ et en déduire la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t^2} dt.$$