Fonctions de plusieurs variables : optimisation

Feuille d'exercices

1 Étudier les extremums locaux et globaux des fonctions ci-dessous :

✎ **1.** $f : (x, y) \in \mathcal{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{2+x-y^2}{1-x+y^2}$ (extremums globaux seulement) ;

2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$;

3. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$;

4. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$;

5. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

2 ✎ On définit la fonction f sur $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1, +\infty[$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{U}, \quad f(x, y, z) = x \ln(1 + z) + (y - 1)^2(z - 1) + 2z.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et qu'elle y admet un unique point critique A que l'on déterminera.

2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ et former sa matrice hessienne au point A.

3. Le point A est-il un extremum local pour la fonction f ?

3 On considère les fonctions

$$f : t \in]0, +\infty[\longmapsto \frac{\ln(1 + t)}{t}, \quad \mathrm{F} : x \in]0, +\infty[\longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\mathrm{G} : (x, y) \in]0, +\infty[^2 \longmapsto \mathrm{F}(xy) - \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y).$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer, pour tout $x > 0$, $\mathrm{F}'(x)$ et $\mathrm{F}''(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$.

2. Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ et exprimer les dérivées partielles premières et secondes de G en tout point (x, y) de $]0, +\infty[^2$ en fonction de x, y, f et f'.

3. Établir que G admet $(1, 1)$ comme seul point critique.

4. Est-ce que G admet un extremum local ?

4 ★ Pour $n \geqslant 2$ entier donné, on considère l'application

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles premières.

2. Montrer que f admet un unique point critique $\mathrm{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ que l'on déterminera.

3. **a.** Déterminer la matrice hessienne de f en A en fonction de la matrice $\mathrm{J}_n \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

b. Déterminer le rang de J_n et calculer $\mathrm{J}_n\mathrm{U}$ où $\mathrm{U} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur dont tous les coefficients sont égaux à 1. En déduire les valeurs propres de J_n.

c. Montrer que f admet en A un extremum local dont on précisera la nature et la valeur.

d. Vérifier que l'extremum précédent est global.

5 ★ L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère la fonction

$$f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (1 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + 3x_3^2)\mathbf{e}^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}.$$

1. Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice $\mathrm{P} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\mathrm{P}\mathrm{P} = \mathrm{I}_3$ et

$${}^t\mathrm{P}\mathrm{A}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. **a.** Déterminer une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^3$,

$$f(\mathrm{X}) = (1 - 2y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2)\mathbf{e}^{-(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}$$

où y_1, y_2, y_3 désignent les coordonnées de X dans la base $\mathscr{B}$.

b. En déduire que pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^3$,

$$(1 - 2r^2)\mathbf{e}^{-r^2} \leqslant f(\mathrm{X}) \leqslant (1 + 4r^2)\mathbf{e}^{-r^2}$$

où l'on a noté $r = \|\mathrm{X}\|$. Préciser les cas où l'une des deux inégalités est une égalité.

3. Déduire de ce qui précède que f admet un maximum et un minimum que l'on déterminera et préciser les points où ils sont atteints.

6 ✎ On définit la fonction

$$f : (x, y) \in]0, +\infty[^2 \longmapsto \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

1. Justifier que $f(x, y) \geqslant 4$ pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.

2. En déduire que f admet un minimum global. Le calculer et préciser les points en lequel il est atteint.

7 On considère la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^4 + y^4 - 4xy.$$

1. Montrer que f n'admet pas de maximum global.

2. L'objectif de cette question est de montrer que f admet un minimum global et de le calculer.

a. Justifier qu'il suffit de travailler sur la restriction de f à $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.
b. Étudier, pour $y \geqslant 0$ donné, les variations de la fonction $g_y : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x, y)$. Montrer qu'elle admet un minimum global m_y que l'on exprimera en fonction de y.
c. Étudier les variations de la fonction $y \longmapsto m_y$ sur $[0, +\infty[$.
d. Conclure.

8 ★ Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

1. Étudier les extremums locaux de f.
2. Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
a. Justifier que f admet un maximum M et un minimum m sur $\mathcal{D}$ et qu'ils sont atteints en des points $(x, y) \in \mathcal{D}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.
b. Étudier la fonction $t \longmapsto f(\cos t, \sin t)$ et en déduire les valeurs de m et M.

9 ★ On considère la fonction f définie sur $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2\ln(y - x).$$

1. Montrer que f admet un unique point critique A que l'on déterminera.
2. En utilisant une formule de Taylor, justifier que f admet en A un minimum global que l'on calculera.
3. La fonction f admet-elle un maximum global ? local ?

10 Soient $r > 0$, $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{B}'(\mathrm{A}, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur la boule fermée $\mathcal{B}'(\mathrm{A}, r)$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur la boule ouverte $\mathcal{B}(\mathrm{A}, r)$.
Montrer que si f est constante sur la sphère $\mathcal{S}(\mathrm{A}, r)$, alors le gradient de f s'annule en un point de la boule ouverte $\mathcal{B}(\mathrm{A}, r)$.

11 **1.** Représenter graphiquement l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$$

et préciser sa nature topologique.
2. Étudier les extremums sur $\mathcal{A}$ de la fonction

$$f : (x, y) \longmapsto y^2 - x^2 y + x^2.$$

12 ★ Soit $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ un nuage de points du plan, non alignés verticalement. En considérant la fonction

$$\mathrm{F} : (m, p) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - p)^2,$$

démontrer l'existence et l'unicité de la droite de régression de y en x et préciser son équation.

13 Dans chacun des cas suivants, étudier la position du plan tangent au graphe de f au point A indiqué.
1. $f : (x, y) \longmapsto xy(3 - x - y)$, $\mathrm{A}_1 = (1, 1)$, $\mathrm{A}_2 = (1, -1)$;
2. $f : (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 + (x - y)^2$, $\mathrm{A} = (1, 0)$.

14 ✎ **1.** Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y + z = 3$ en utilisant successivement les méthodes suivantes :
a. en explicitant la contrainte ;
b. sans expliciter la contrainte.
2. Déterminer les extremums de la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 - 2xz + 2yz + \frac{1}{2}z^2$ sous la contrainte $x - 2y + 2z = 9$ sans expliciter celle-ci.
3. La fonction

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-4, +\infty[\longmapsto \begin{array}{l} 2 - x - 8y + 7z - \frac{3}{2}x^2 + \\ \quad + y^2 - 3yz + z^2 + y\ln(4 + z) \end{array}$$

présente-t-elle un extremum au point $\mathrm{A} = (1, 0, -3)$ sous la contrainte $4x - y - z = 7$?

15 ♣ Soient a, b, c des réels strictement positifs.
1. Montrer que

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = abc, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$$

est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto xyz$ admet sur $\mathcal{K}$ un minimum et un maximum globaux que l'on déterminera, ainsi que les points en lesquels ils sont atteints.

16 Soient un entier $n \geqslant 1$ et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ strictement positifs tels que $\sum_i \alpha_i = 1$. On considère les fonctions

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \in [0, +\infty[^n \longmapsto \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad g : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

On pose également :

$$\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0, +\infty[^n : g(x_1, \ldots, x_n) = 1\}.$$

1. Montrer que f admet un maximum μ sur Γ et que celui-ci est atteint sur $\Gamma \cap]0, +\infty[^n$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $]0, +\infty[^n$ sous la contrainte $g(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Montrer que $\mu = f(1, \ldots, 1) = 1$.
3. En déduire que :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \geqslant 0, \quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

17 Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y, z) = x\ln x + y\ln y + z\ln z.$$

1. La fonction f est-elle minorée, majorée, bornée sur $\mathcal{D}$?
2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

Étant donné un réel $a > 0$, on considère l'ensemble

$$\mathcal{C}_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3a\}$$

et on note $g = f|_{\mathcal{C}_a}$ la restriction de f à $\mathcal{C}_a$.

3. Montrer que si g admet un extremum local au point (x, y, z), alors :

$$1 + \ln x = 1 + \ln y = 1 + \ln z.$$

4. Étudier l'existence des extremums locaux de g. Comparer la valeur obtenue à celle trouvée à la première question.
5. Retrouver les extremums de g en se ramenant à l'étude des extremums d'une fonction de deux variables bien choisies.

18 ✎ Étudier les extremums des fonctions ci-dessous sous la contrainte indiquée :

1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$;
2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto 3x + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 10$;
3. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y^2 - x^2$ sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$;
4. $f : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longmapsto y - x^3$ sous la contrainte $x^3 + y^4 = 1$.

19 ★ Soit $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. L'objectif de l'exercice est d'établir le lemme 1.7 (et en particulier l'existence d'une valeur propre de A) par des méthodes analytiques.

1. **a.** Justifier que la forme quadratique q_A canoniquement associée à A est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

   b. Déterminer le gradient $\nabla q_\mathrm{A}(\mathrm{X})$ de q_A en tout point $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$.
2. **a.** Justifier que sur la sphère unité $\mathcal{S} = \{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n : {}^t\mathrm{X}\mathrm{X} = 1\}$, la fonction q_A admet un minimum α et un maximum β.

   b. Montrer que :

   $$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \left\|\mathrm{X}\right\|^2 \leqslant q_\mathrm{A}(\mathrm{X}) \leqslant \beta \left\|\mathrm{X}\right\|^2 .$$

   En déduire que les valeurs propres de A appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

   c. Montrer qu'un vecteur $\mathrm{X} \neq 0$ réalise l'égalité dans une des deux inégalités ci-dessus si, et seulement si, il est propre pour α ou β.

   d. En déduire en particulier que A admet au moins une valeur propre, en particulier que α et β sont respectivement les plus petite et plus grande valeurs propres de A.

Programmation :

- Classe : 2, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 14, 17, 19
- TD : 1, 6
- TD* : 15, 16