

Travaux dirigés
Fonctions de plusieurs variables : optimisation

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 1 / 91

Exercice 1 Q 1

Exercice 1
Question 1

La fonction f est bien définie sur $\mathcal{B}(0,1)$ car, pour $X = (x, y) \in \mathcal{B}(0,1)$, $x^2 \leq x^2 + y^2 = \|X\|^2 < 1$ si bien que $x < 1$ et $1 - x + y^2 \geq 1 - x > 0$.

Tout d'abord,

$$f(x, 0) = \frac{2+x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$$

si bien que f n'admet pas de maximum.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 2 / 91

Exercice 1 Q 1

Bien qu'il soit possible de conclure par un calcul direct, on peut simplifier (légèrement) les calculs et illustrer une méthode intéressante en remarquant que pour tout $(x, y) \in \mathcal{B}(0,1)$, on a

$$f(x, y) = \frac{2+u}{1-u} = g(u)$$

où $u = x - y^2 < 1$. Une rapide étude montre que g est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ dans lequel u prend ses valeurs. Par suite, f admet un minimum en un point (x_0, y_0) si, et seulement si, la fonction $u : (x, y) \mapsto x - y^2$ admet un minimum en ce point. Mais sur l'ouvert $\mathcal{B}(0,1)$,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{B}(0,1), \quad \nabla u(x, y) = (1, -2y) \neq 0$$

ce qui exclut l'existence d'un minimum pour u et donc pour f .

La fonction f ne présente donc pas d'extremum global.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 3 / 91

Exercice 1 Q 2

Exercice 1
Question 2

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (6xy - 12x, 3y^2 + 3x^2 - 12y).$$

Elle admet quatre points critiques, seuls extremums locaux éventuels :

$$A = (0, 0), \quad B = (0, 4), \quad C = (2, 2) \quad \text{et} \quad D = (-2, 2).$$

La hessienne est donnée par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6y - 12 & 6x \\ 6x & 6y - 12 \end{pmatrix}.$$

- En particulier en A ,

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

admet deux valeurs propres strictement négatives donc f présente un maximum local en ce point.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 4 / 91

Exercice 1 Q 2

- Au point B ,

$$\nabla^2 f(B) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

admet deux valeurs propres strictement positives et f présente un minimum local en ce point.

- Au point C ,

$$\nabla^2 f(C) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $rt - s^2 < 0$, la fonction f présente donc un col.

- Au point D ,

$$\nabla^2 f(D) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $rt - s^2 < 0$, la fonction f présente donc un col.

La fonction f n'admet aucun extremum global car elle n'est pas bornée : $f(0, y) = y^3 - 6y^2 + 2 \sim y^3, y \rightarrow \pm\infty$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 5 / 91

Exercice 1 Q 3

Exercice 1
Question 3

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (4(x^3 - x + y), 4(y^3 + x - y)).$$

Elle admet trois points critiques, seuls extremums locaux éventuels :

$$A = (0, 0), \quad B = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad C = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

La hessienne est donnée par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

- En particulier en B et en C ,

$$\nabla^2 f(B) = \nabla^2 f(C) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$. La fonction f présente donc un minimum local en B et en C .

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 6 / 91

Exercice 1 Q 3

- En A ,

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant 0 et l'on ne peut pas conclure directement. Pour $H = (h, k) \in \mathbb{R}^2$, on forme la différence

$$d(H) = f(A + H) - f(A) = f(h, k) = h^4 + k^4 - 2(h - k)^2.$$

On observe que $d(h, 0) = (h^2 - 2)h^2 < 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ alors que $d(h, h) = 2h^4 > 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. La différence $d(h, k)$ ne garde donc pas un signe constant au voisinage de 0, ce qui signifie que f ne présente pas d'extremum local en ce point.

Remarque. En écrivant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 - 8 \geq -8,$$

on observe que B et C sont des minimums globaux pour f . En revanche, f n'admet pas de maximum local donc pas de maximum global.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 7 / 91

Exercice 1 Q 4

Exercice 1
Question 4

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^3 avec :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x, y, z) = (x + yz, xz + 1, xy - 1).$$

Elle admet un unique point critique : $A = (1, 1, -1)$, seul extremum local éventuel. La hessienne au point A est donnée par :

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle admet pour valeurs propres 1, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. Celles-ci étant non nulles mais pas toutes de même signe, la fonction f ne présente pas d'extremum au point A .

Remarque. On peut également calculer, pour $H = (h, k, \ell)$,

$$d(H) = f(A + H) - f(A) = \frac{h^2}{2} + h k \ell + h \ell - h k + k \ell$$

et observer que pour $h \rightarrow 0$, $d(h, 0, h) = \frac{3}{2}h^2 > 0$ alors que $d(h, h, 0) = -\frac{1}{2}h^2 < 0$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 8 / 91

Exercice 1 Q 5

Exercice 1

Question 5

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^3 avec :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x, y, z) = 2(x - yz, y - xz, z - xy).$$

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x = yz \\ y = xz \\ z(1 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ yz = 1 \\ y = z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ yz = -1 \\ y = -z \end{cases}.$$

La fonction f admet donc 5 points critiques

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (1, 1, 1), \quad C = (1, -1, -1), \\ D = (-1, 1, -1) \quad \text{et} \quad E = (-1, -1, 1).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 9 / 91

Exercice 1 Q 5

La hessienne est donnée par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \nabla^2 f(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} 1 & -z & -y \\ -z & 1 & -x \\ -y & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

- Au point critique A , $\nabla^2 f(A) = 2I_3$ a toutes ses valeurs propres strictement positives, donc f admet un minimum local.
- Au point critique B ,

$$\nabla^2 f(B) = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres -2 et 4 , non nulles et de signes opposés. Le point B n'est donc pas un extremum local pour f .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 10 / 91

Exercice 1 Q 5

- Au point critique C ,

$$\nabla^2 f(C) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres ne sont pas immédiates à trouver. En revanche, on calcule facilement

$$q_C(h, k, \ell) = 2(h^2 + k^2 + \ell^2 + 2hk + 2h\ell - 2k\ell) = 2(h + k + \ell)^2 - 8h\ell$$

et on observe que $q_C(1, 0, 0) = 2 > 0$ et $q_C(2, -1, -1) = -8 < 0$. La fonction f ne présente donc pas non plus d'extremum local en C .

- Les points critiques D et E s'obtiennent à partir de C par permutation des variables. Vu le rôle symétrique des variables x, y et z dans l'expression de f , ils sont de même nature que C : f n'y présente pas d'extremum local.

La fonction f n'est ni minorée ni majorée donc n'admet pas d'extremum global : $f(x, x, x) = 3x^2 - x^3 \sim -x^3, x \rightarrow \pm\infty$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 11 / 91

Exercice 2 Q 1

Exercice 2

Question 1

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{U} par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^1 avec, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{U}$:

$$\nabla f(x, y, z) = (\ln(1+z), 2(y-1)(z-1), \frac{x}{1+z} + (y-1)^2 + 2).$$

Il existe un unique point critique pour f , i.e. un seul élément de \mathcal{U} qui annule le gradient de f : $A = (-2, 1, 0)$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 12 / 91

Exercice 2 Q 2

Exercice 2

Question 2

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathcal{U} par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^2 avec, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{U}$:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1+z} \\ 0 & 2(z-1) & 2\frac{y-1}{1+z} \\ \frac{1}{1+z} & 2(y-1) & -\frac{x}{(1+z)^2} \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 13 / 91

Exercice 2 Q 3

Exercice 2

Question 3

La matrice $\nabla^2 f(A)$ admet -2 pour valeur propre évidente (par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour cette valeur propre).

La matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. En notant $\lambda_1 = -2$, λ_2 et λ_3 ses valeurs propres, on a donc $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr} \nabla^2 f(A) = 0$. Ainsi $\lambda_2 + \lambda_3 = 2 > 0$ si bien que $\nabla^2 f(A)$ admet nécessairement une valeur propre strictement positive.

La hessienne $\nabla^2 f(A)$ admettant deux valeurs propres non nulles de signes opposés, le point A n'est pas un extremum local pour la fonction f .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 14 / 91

Exercice 3 Q 1

Exercice 3

Question 1

La fonction f admettant une limite finie à l'origine, l'intégrale $F(x)$ est faussement généralisée donc bien définie pour tout $x > 0$. On notera encore f le prolongement par continuité de f à l'origine, défini par $f(0) = 1$.

La fonction f étant continue sur $]0, +\infty[$, la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ d'après le théorème fondamental, avec $F' = f$. La fonction f étant de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, la fonction F est donc de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ avec $F' = f$ et $F'' = f'$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 15 / 91

Exercice 3 Q 2

Exercice 3

Question 2

La fonction G est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^2 avec, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[$,

$$\nabla G(x, y) = (yF'(xy) - F'(x), xF'(xy) - F'(y)) \\ = (yf(xy) - f(x), xf(xy) - f(y))$$

et :

$$\nabla^2 G(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 f''(xy) - f''(x) & f(xy) + xyf'(xy) \\ f(xy) + xyf'(xy) & x^2 f''(xy) - f''(y) \end{pmatrix}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 16 / 91

Exercice 3 Q 3

Exercice 3

Question 3

Un point $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ est critique pour G si, et seulement si,

$$\begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ xf(x) = yf(y) \end{cases} \iff \begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ \ln(1+x) = \ln(1+y) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} xf(x^2) - f(x) = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

Or :

$$xf(x^2) - f(x) = 0 \iff \ln(1+x^2) = \ln(1+x) \iff x^2 = x$$

et la fonction G admet donc $A = (1, 1)$ pour seul point critique.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 17 / 91

Exercice 3 Q 4

Exercice 3

Question 4

Puisque G est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, le seul extremum local éventuel de G est en A , seul point critique de G .

En ce point, la hessienne s'écrit

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 0 & f(1) + f'(1) \\ f(1) + f'(1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Elle a un déterminant $rt - s^2 = -(f(1) + f'(1))^2 = -\frac{1}{4} < 0$ et le point A n'est donc pas un extremum local pour G : c'est un point col.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 18 / 91

Exercice 4 Q 1

Exercice 4

Question 1

La fonction f est polynomiale donc de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^n avec :

$$\forall j \in [1, n], \quad \forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \partial_j f(X) = 2x_j + 2 \sum_{k=1}^n x_k - 1.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 19 / 91

Exercice 4 Q 2

Exercice 4

Question 2

Si $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est point critique de f i.e.

$$\forall j \in [1, n], \quad 2x_j + 2 \sum_{k=1}^n x_k - 1 = 0,$$

alors

$$0 = \sum_{j=1}^n \partial_j f(X) = 2(n+1) \sum_{k=1}^n x_k - n$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n x_k = \frac{n}{2(n+1)}$$

puis :

$$\forall j \in [1, n], \quad x_j = - \sum_{k=1}^n x_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

La réciproque étant immédiate, la fonction f admet donc un seul point critique $A = \frac{1}{2(n+1)}(1, 1, \dots, 1)$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 20 / 91

Exercice 4 Q 3.a

Exercice 4

Question 3.a

On a :

$$\forall (i, j) \in [1, n], \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \partial_{ij}^2 f(X) = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

La matrice hessienne de f en tout point $X \in \mathbb{R}^n$ (et en particulier en A) est donc donnée par :

$$\nabla^2 f(X) = 2I_n + 2J_n.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 21 / 91

Exercice 4 Q 3.b

Exercice 4

Question 3.b

Toutes les colonnes de J_n étant égales et non nulles, elles engendrent une droite. Ainsi la matrice J_n est de rang 1. La matrice J_n admet donc 0 pour valeur propre et le sous-espace propre associé est l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$.

Le calcul immédiat $J_n U = nU$ met aussi en évidence que n est valeur propre et que U est un vecteur propre associé.

Pour des raisons dimensionnelles, on a toutes les valeurs propres de J_n : 0 et n .

Remarque. Le deuxième point n'est pas une surprise : la matrice J_n étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. Puisque 0 est déjà valeur propre avec pour sous-espace propre l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$, la dernière valeur propre est égale à $\lambda_n = \text{tr } J_n - (n-1) \times 0 = n$ et le sous-espace propre associé est la droite $E_n(J_n) = E_0(J_n)^\perp$ engendrée par ${}^t(1 \ \dots \ 1)$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 22 / 91

Exercice 4 Q 3.c

Exercice 4

Question 3.c

D'après a., un réel λ est valeur propre de $\nabla^2 f(A)$ si, et seulement si,

$$\nabla^2 f(A) - \lambda I_n = 2(J_n - (\frac{\lambda}{2} - 1)I_n)$$

n'est pas inversible i.e. si, et seulement si, $\frac{\lambda}{2} - 1$ est valeur propre de J_n . D'après b., la matrice $\nabla^2 f(A)$ admet donc pour valeurs propres 2 et $2(n+1)$, toutes deux strictement positives. Dans ces conditions, la fonction f présente un minimum local au point A , égal à

$$f(A) = \frac{-n}{4(n+1)}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 23 / 91

Exercice 4 Q 3.d

Exercice 4

Question 3.d

Le minimum atteint en A est global car la hessienne $\nabla^2 f(X)$ est positive pour tout point X de l'ouvert convexe \mathbb{R}^n d'après les questions précédentes. En effet, étant donné $H \in \mathbb{R}^n$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction partielle $t \mapsto f(A + tH)$ sur $[0, 1]$ donne :

$$f(A + H) - f(A) = u(1) - u(0) = u'(0) + \int_0^1 (1-t)u''(t) dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)q_{A+tH}(H) dt \geq 0$$

car $u'(0) = \partial_H f(A) = \langle \nabla f(A), H \rangle = 0$.

Remarque. La fonction f étant polynomiale de degré 2, son développement limité à l'ordre 2 en A est exact :

$$\forall H \in \mathbb{R}^n, \quad f(A + H) = f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2}q_A(H)$$

et l'on peut conclure facilement que A est un minimum global à partir du signe de q_A . On renvoie à la remarque terminant l'exercice 12 pour plus de détails.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 24 / 91

Exercice 5 Q 1

Exercice 5

Question 1

La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont (supplémentaires) orthogonaux. Autrement dit, si P désigne la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale (U_1, U_2, U_3) de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de A , alors P est orthogonale (${}^tPP = I_3$ i.e. $P^{-1} = {}^tP$) et telle que, d'après la formule de changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Les calculs conduisent par exemple à

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 25 / 91

Exercice 5 Q 2.a

Exercice 5

Question 2.a

En identifiant \mathbb{R}^3 à $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en notant $Y = (y_1, y_2, y_3)$ la colonne des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$, on a $X = PY$ si bien que :

$$\begin{aligned} f(X) &= (1 + {}^tXAX)e^{-XX} = (1 + {}^t(PY)A(PY))e^{-Y(PY)(PY)} \\ &= (1 + {}^tY{}^tPAPY)e^{-Y{}^tPPY} = (1 + {}^tYDY)e^{-YY} \\ &= (1 - 2y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2)e^{-(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 26 / 91

Exercice 5 Q 2.b

Exercice 5

Question 2.b

Vu l'expression de la norme en base orthonormale, on a $r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ et l'encadrement demandé est alors une conséquence immédiate de l'expression obtenue en a. :

$$(1 - 2r^2)e^{-r^2} \leq f(X) \leq (1 + 4r^2)e^{-r^2}.$$

Remarque. On a égalité dans l'inégalité de gauche si, et seulement si, $y_2 = y_3 = 0$ i.e. $X \in \text{Vect } U_1 = E_{-2}(A)$. De même, on a égalité dans l'inégalité de droite si, et seulement si, $X \in E_4(A)$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 27 / 91

Exercice 5 Q 3

Exercice 5

Question 3

L'étude des variations des fonctions d'une variable $r \mapsto (1 - 2r^2)e^{-r^2}$ et $r \mapsto (1 + 4r^2)e^{-r^2}$ montre qu'elles admettent respectivement un minimum égal à $-2e^{-3/2}$ atteint en $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et un maximum égal à $4e^{-3/4}$ atteint en $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dès lors, l'encadrement de la question 2.b. met en évidence que :

- la fonction f est minorée par $-2e^{-3/2}$, qui est un minimum atteint en les points tels que $X \in E_{-2}(A)$ et $\|X\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, i.e. en $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}U_1$ où $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$;
- la fonction f est majorée par $4e^{-3/4}$, qui est un maximum atteint en les points tels que $X \in E_4(A)$ et $\|X\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, i.e. en $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}U_3$ où $U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 28 / 91

Exercice 6 Q 1

Exercice 6

Question 1

Il vient :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad f(x, y) - 4 = \frac{(x - y)^2}{xy} \geq 0.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 29 / 91

Exercice 6 Q 2

Exercice 6

Question 2

On a égalité dans l'inégalité $f(x, y) \geq 4$ si, et seulement si, $x = y$. La fonction f admet donc un minimum égal à 4, atteint en tout point de la demi-droite ouverte d'équation $y = x, x > 0$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 30 / 91

Exercice 7 Q 1

Exercice 7

Question 1

On a $f(x, 0) = x^4 \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. La fonction f n'est donc pas majorée et n'admet donc pas de maximum global.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 31 / 91

Exercice 7 Q 2.a

Exercice 7

Question 2.a

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = f(-x, -y)$ où $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ est une bijection (involutive) de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R} \times]-\infty, 0[$.

Par suite, si la restriction de f à $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ admet en $(a, b) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ un minimum, alors le point (a, b) est aussi un minimum pour f , ainsi que $(-a, -b)$, et réciproquement¹.

Il suffit donc de minimiser la fonction f sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

1. Si f présente en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un minimum, alors il en va de même en $(-a, -b)$. L'un des points (a, b) et $(-a, -b)$ appartient alors à $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et est un minimum pour la restriction de f .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 32 / 91

Exercice 7 Q 2.b

Exercice 7

Question 2.b

Pour $y \geq 0$ donné, la fonction

$$g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

est dérivable avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_y(x) = 4(x^3 - y).$$

La fonction g_y est donc décroissante sur $]-\infty, y^{1/3}]$ puis croissante sur $[y^{1/3}, +\infty[$ et admet donc un minimum en $y^{1/3}$ égal à

$$m_y = g_y(y^{1/3}) = f(y^{1/3}, y) = y^4 - 3y^{4/3}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 33 / 91

Exercice 7 Q 2.c

Exercice 7

Question 2.c

La fonction $y \mapsto m_y = y^4 - 3y^{4/3}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ (car $\frac{4}{3} > 1$), de dérivée

$$y \mapsto 4(y^3 - y^{1/3}) = 4y^{1/3}(y^{8/3} - 1).$$

Elle est donc décroissante sur $[0, 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$ et admet un minimum en 1 égal $m(1) = -2$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 34 / 91

Exercice 7 Q 2.d

Exercice 7

Question 2.d

D'après b. et c.,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \quad f(x, y) \geq m_y \geq -2$$

avec égalité si, et seulement si, $(x, y) = (y^{1/3}, y)$ et $y = 1$ c'est-à-dire pour $(x, y) = (1, 1)$.

D'après a., la fonction f présente donc un minimum aux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ égal à -2 .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 35 / 91

Exercice 8 Q 1

Exercice 8

Question 1

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = 3(x^2 - 1 - y^2, -2xy).$$

Elle admet deux points critiques : $A = (1, 0)$ et $B = (-1, 0)$, seuls extremums locaux éventuels. La hessienne est donnée par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 f(x, y) = 6 \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}.$$

- Au point A ,

$$\nabla^2 f(A) = 6 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admet deux valeurs propres non nulles et de signes opposés, la fonction f ne présente donc pas d'extremum local.

- De même en B où

$$\nabla^2 f(B) = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 36 / 91

Exercice 8 Q 2.a

Exercice 8

Question 2.a

L'ensemble \mathcal{D} est fermé et borné (en tant que boule fermée...). La fonction f y étant continue, elle y est donc bornée et atteint ses bornes, i.e. admet minimum m et maximum M .

Ces extremums ne sont pas atteints en un point de la boule ouverte $\mathcal{B}(0, 1)$, sans quoi ce devrait être un point critique de f , qui n'en admet aucun sur cet ouvert. Ils le sont donc en un point du bord $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 37 / 91

Exercice 8 Q 2.b

Exercice 8

Question 2.b

L'ensemble \mathcal{S} étant paramétré par le chemin $t \in [-\pi, \pi] \mapsto (\cos t, \sin t)$, l'étude de f sur \mathcal{S} revient à celle de la fonction

$$g : t \in [-\pi, \pi] \mapsto f(\gamma(t)) = 4 \cos^3 t - 6 \cos t.$$

On observe que $g(t) = P(\cos t)$ où $P(x) = 4x^3 - 6x$ et $x = \cos t$ parcourt le segment $[-1, 1]$. L'étude des variations de P sur le segment $[-1, 1]$ montre qu'il admet un minimum égal à $-2\sqrt{2}$ et un maximum égal à $2\sqrt{2}$.

La fonction f admet donc pour minimum $m = -2\sqrt{2}$ et pour maximum $M = 2\sqrt{2}$ sur le bord \mathcal{S} et donc sur l'ensemble \mathcal{D} d'après a..

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 38 / 91

Exercice 9 Q 1

Exercice 9

Question 1

L'ensemble \mathcal{U} est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par l'application $(x, y) \mapsto y - x$, continue sur \mathbb{R}^2 .

La fonction f y est de classe \mathcal{C}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \nabla f(x, y) = 2 \left(x + \frac{1}{y-x}, y - \frac{1}{y-x} \right).$$

Elle admet un unique point critique $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 39 / 91

Exercice 9 Q 2

Exercice 9

Question 2

En un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la hessienne est donnée par

$$\nabla^2 f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $\alpha = \frac{1}{(y-x)^2} > 0$. On a $rt - s^2 = 4(1+2\alpha) > 0$ et $t = 2(1+\alpha) > 0$ si bien que $\nabla^2 f(x, y)$ est positive.

Dans ces conditions, étant donné $H \in \mathbb{R}^2$ tel que $A + H \in \mathcal{U}$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction partielle $u : t \mapsto f(A + tH)$ sur $[0, 1]$, bien définie et \mathcal{C}^2 car \mathcal{U} est convexe, donne :

$$f(A + H) - f(A) = u(1) - u(0) = u'(0) + \int_0^1 (1-t)u''(t) dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)u_{A+tH}(H) dt \geq 0$$

car $u'(0) = \partial_H f(A) = \langle \nabla f(A), H \rangle = 0$.

La fonction f présente donc un minimum global au point A .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 40 / 91

Exercice 9 Q 3

Exercice 9

Question 3

Sur l'ouvert \mathcal{U} , la fonction f ne peut admettre de maximum qu'au point critique A . Or elle y admet un minimum et n'y est pas localement constante (sinon elle admettrait une infinité de points critiques). Elle ne peut donc y admettre de maximum local.

La fonction f n'admet donc pas de maximum (ni local ni global).

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 41 / 91

Exercice 10

Exercice 10

On reconnaît une généralisation du théorème de Rolle, on essaie donc d'adapter la démonstration.

Si f est constante, le gradient de f est nul en tout point de la boule ouverte $B(A, r)$.

Si f n'est pas constante, alors il existe $B \in B(A, r)$ tel que $f(B) \neq \alpha$, où α est la valeur de f sur la sphère S . Quitte à considérer $-f$ plutôt que f , on peut supposer que $f(B) > \alpha$.

La fonction f , continue sur la partie $B'(A, r)$ fermée, bornée et non vide, y admet un maximum $M \geq f(B)$ nécessairement atteint sur l'ouvert $B(A, r)$... et donc en un point critique de f : le gradient de f s'annule donc sur l'ouvert $B(A, r)$.

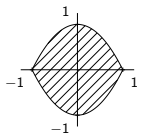
www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 42 / 91

Exercice 11 Q 1

Exercice 11

Question 1

L'ensemble \mathcal{A} est délimité par deux paraboles; il est représenté ci-contre.



L'ensemble $\mathcal{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y\}$ est fermé comme image réciproque du fermé $[-1, +\infty[$ par l'application $(x, y) \mapsto y - x^2$ continue sur \mathbb{R}^n . De même, $\mathcal{A}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x^2\}$ est fermé. Par suite, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est fermé comme intersection de fermés.

L'ensemble \mathcal{A} est également borné : pour $(x, y) \in \mathcal{A}$, on a $|y| \leq 1$ d'où $y^2 \leq |y| \leq 1 - x^2$ i.e. $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1$.

L'intérieur de \mathcal{A} est l'ouvert défini par :

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 43 / 91

Exercice 11 Q 2

Exercice 11

Question 2

La fonction f , continue sur \mathcal{A} fermé, borné et non vide, y admet un minimum m et un maximum M .

- Si l'un de ces extremums est atteint sur l'intérieur \mathcal{U} , c'est en un point critique de la fonction f , de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (2x(1 - y), 2y - x^2).$$

Elle admet trois points critiques : $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, 1)$ et $(\sqrt{2}, 1)$, dont seul $A = (0, 0)$ appartient à \mathcal{U} , qui est donc le seul élément de \mathcal{U} en lequel f peut présenter un extremum.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 44 / 91

Exercice 11 Q 2

- Le bord de \mathcal{A} est la réunion des portions de paraboles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 paramétrées par $x \in [-1, 1] \mapsto (x, x^2 - 1)$ et $x \in [-1, 1] \mapsto (x, 1 - x^2)$. D'une part,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x, x^2 - 1) = 1$$
 et la fonction f est donc constante sur \mathcal{P}_1 . D'autre part, une rapide étude des variations de

$$g : x \in [-1, 1] \mapsto f(x, 1 - x^2) = 2x^4 - 2x^2 + 1$$
 montre que la fonction f admet sur \mathcal{P}_2 un minimum égal à $\frac{1}{2}$ atteint en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ ainsi qu'un maximum égal à 1 atteint en $B = (0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

En comparant les extremums de f sur le bord de \mathcal{A} à la valeur de $f(A) = 0$, seul extremum possible sur \mathcal{U} , on en déduit que f admet sur \mathcal{A} un minimum égal à $m = 0$ atteint en A et un maximum égal à $M = 1$ atteint en B ainsi qu'en tout point de \mathcal{P}_1 .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 45 / 91

Exercice 12

Exercice 12

On note

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}, \quad \sigma_x = \sqrt{\text{cov}(x, x)}.$$

La fonction

$$F : (m, p) \mapsto \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - p)^2$$

est polynomiale donc de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (m, p) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla F(m, p) = \left(-2 \sum_{k=1}^n x_k (y_k - mx_k - p), -2 \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - p) \right)$$

$$= -2n(\overline{xy} - m\overline{x^2} - p\bar{x}, \bar{y} - m\bar{x} - p).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 46 / 91

Exercice 12

Pour $(m, p) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla F(m, p) = 0 \iff \begin{cases} m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \\ p = \bar{y} - m\bar{x} \end{cases}$$

où $\sigma_x^2 > 0$ car les points ne sont pas alignés verticalement. Ainsi la fonction f admet pour seul point critique A dont les coordonnées sont données ci-dessus.

La hessienne est constante égale à :

$$\forall (m, p) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 F(m, p) = 2n \begin{pmatrix} \overline{x^2} & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $4n^2(\overline{x^2} - \bar{x}^2) = 4n^2\sigma_x^2 > 0$ et le premier coefficient diagonal $2n\overline{x^2} > 0$. La fonction F présente donc un minimum local au point A .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 47 / 91

Exercice 12

Enfin, ce minimum est global car la hessienne est positive en tout point de l'ouvert convexe \mathbb{R}^2 d'après le calcul précédent. En effet, étant donné $H \in \mathbb{R}^2$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction partielle $u : t \mapsto F(A + tH)$ sur $[0, 1]$ donne :

$$F(A + H) - F(A) = u(1) - u(0) = u'(0) + \int_0^1 (1-t)u''(t) dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)q_{A+tH}(H) dt \geq 0$$

car $u'(0) = \partial_H F(A) = \langle \nabla F(A), H \rangle = 0$.

En conclusion, il existe une unique droite dont les coefficients m et p minimisent la fonctionnelle F , elle a pour équation

$$y - \bar{y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 48 / 91

Remarque. L'expression de $F(m, p)$ est polynomiale de degré 2 en (m, p) . Pour $H \in \mathbb{R}^2$ voisin de 0, le développement limité de $F(A+H)$ à l'ordre 2 s'obtient à partir de celui de la fonction partielle $u : t \mapsto F(A+tH)$. Comme cette dernière est aussi polynomiale de degré inférieur ou égal à 2, son développement à l'ordre 2 est exact, i.e. le reste est nul. Il en va donc de même pour le développement limité de F en A à l'ordre 2 :

$$F(A+H) = F(A) + \langle \nabla F(A), H \rangle + \frac{1}{2}q_A(H)$$

et l'on obtient alors simplement

$$F(A+H) - F(A) = \frac{1}{2}q_A(H) \geq 0.$$

Exercice 13

Question 1

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (3y - 2xy - y^2, 3x - x^2 - 2xy)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2x - 2y \\ 3 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}.$$

On note Σ le graphe de f .

On constate que $\nabla f(A_1) = 0$, autrement dit le point A_1 est critique pour f . Le plan tangent à Σ au point A_1 est donc horizontal d'équation $z = f(A_1)$ i.e. $z = 1$ et la question de sa position par rapport à Σ revient donc à savoir si f présente un extremum au point A_1 .

Or

$$\nabla^2 f(A_1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $rt - s^2 = 3 > 0$ et $r = -2 < 0$. Dans ces conditions, f présente un maximum local au point A_1 : $f(X) \leq f(A_1) = 1$ au voisinage de A_1 , ce qui signifie que Σ est situé localement en dessous de son plan tangent au point A_1 .

Au point A_2 , $\nabla f(A_2) = (-2, 4)$ et le plan tangent à Σ a donc pour équation

$$z = f(A_2) + \langle \nabla f(A_2), X - A_2 \rangle \iff z = 3 - 2x + 4y.$$

Le point A_2 est critique pour la fonction auxiliaire $g : X \mapsto f(X) - \langle \nabla f(A_2), X \rangle$ qui a la même hessienne que f :

$$\nabla^2 g(A_2) = \nabla^2 f(A_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

de déterminant $-13 < 0$. Dans ces conditions, g ne présente pas d'extremum local au point A_2 . Sachant que

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad (g(X) \leq g(A_2) \iff f(X) \leq f(A_2) + \langle \nabla f(A_2), X - A_2 \rangle),$$

cela signifie que le plan tangent à Σ au point A_2 ne reste pas du même côté de Σ au voisinage de A_2 .

Exercice 13

Question 2

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = 2(2x^3 + x - y, 2y^3 - x + y).$$

En particulier, $\nabla f(A) = 2(3, -1)$ et le graphe Σ de f admet donc au point A le plan tangent d'équation

$$z = f(A) + \langle \nabla f(A), X - A \rangle \iff z = -4 + 6x - 2y.$$

Le point A est critique pour la fonction auxiliaire $g : X \mapsto f(X) - \langle \nabla f(A), X \rangle$ avec

$$\nabla^2 g(A) = \nabla^2 f(A) = 2 \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

On a $rt - s^2 = 24 > 0$ et $r > 0$, si bien que g admet un minimum local au point A . En d'autres termes, on a

$$g(X) \geq g(A) \iff f(X) \geq f(A) + \langle \nabla f(A), X - A \rangle$$

pour X voisin de A , ce qui signifie que Σ est localement au dessus de son plan tangent au point A .

Exercice 14

Question 1.a

La contrainte C est explicite :

$$x + y + z = 3 \iff z = 3 - x - y.$$

Étudier les extremums de f sous la contrainte C revient donc à étudier les extremums de la fonction

$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y, 3 - x - y) = 2x^2 + 2xy - 6x + 2y^2 - 6y + 9.$$

La fonction g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla g(x, y) = 2(2x + y - 3, x + 2y - 3)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 g(x, y) = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Elle admet $A = (1, 1)$ pour unique point critique donc pour seul extremum local éventuel.

Sachant que $rt - s^2 = 12 > 0$ et $r > 0$, la matrice symétrique $\nabla^2 f(A)$ est définie-positive, ce qu'on peut également justifier en décomposant la forme quadratique q_A qui lui est canoniquement associée :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}, \quad q_A(h, k) = 4(h^2 + hk + k^2) = 4\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + 3k^2 > 0.$$

Dans ces conditions, la fonction g présente en A un minimum local.

Puisque g est polynomiale de degré 2, on a déjà vu que son développement limité à l'ordre 2 au point A est exact :

$$\forall H = (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad g(A+H) = g(A) + \langle \nabla g(A), H \rangle + \frac{1}{2}q_A(H) \\ = 3 + 2(h^2 + hk + k^2),$$

ce qu'on peut tout simplement ici vérifier par le calcul... Le minimum atteint en A est donc global. Ainsi f présente sous la contrainte C un minimum global égal à $g(A) = 3$ atteint au point $(1, 1, 1)$ mais pas de maximum local.

Remarque. On a décomposé g en somme de carrés :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = 3 + 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}(y - 1)^2.$$

Exercice 14

Question 1.b

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^3 avec :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z).$$

La contrainte d'égalité linéaire $C : x + y + z = 3$ définit ici un plan dirigé par le plan vectoriel $\mathcal{H} : x + y + z = 0$.

Les points critiques sous la contrainte C sont les solutions du système

$$\begin{cases} (x, y, z) \in C \\ \nabla f(x, y, z) \in \mathcal{H}^\perp \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Il y en a un et un seul : $A = (1, 1, 1)$, qui est donc l'unique extremum local éventuel de f sous la contrainte C .

Exercice 14 Q 1.b

En ce point, la hessienne est donnée par $\nabla^2 f(A) = 2I_3$. La forme quadratique associée q_A est définie-positive sur \mathbb{R}^3 , si bien que pour $H \in \mathcal{H}$ proche de 0,

$$f(A+H) - f(A) = \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_A(H) + o(\|H\|^2)$$

$$= \|H\|^2 + o(\|H\|^2) = \|H\|^2 (1 + o(1)) \geq 0.$$

La fonction f présente donc un minimum local au point A sous la contrainte \mathcal{C} . Pour justifier que ce minimum est global, on peut faire remarquer que le développement limité au point A de la fonction f , polynomiale de degré 2, obtenu ci-dessus est exact :

$$\forall H \in \mathcal{H}, \quad f(A+H) - f(A) = \|A+H\|^2 - \|A\|^2$$

$$= 2 \langle A, H \rangle + \|H\|^2 = \|H\|^2 \geq 0$$

ou faire appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^3 euclidien canonique : en l'appliquant aux vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, il vient :

$$9 = (x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \quad \text{i.e.} \quad 3 = f(A) \leq f(x, y, z).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 57 / 91

Exercice 14 Q 2

Exercice 14

Question 2

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^3 avec :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x, y, z) = (2x - 2z, 2z, -2x + 2y + z).$$

La contrainte \mathcal{C} est linéaire : c'est un plan affine dirigé par le plan vectoriel \mathcal{H} d'équation $x - 2y + 2z = 0$. Les points critiques sous la contrainte \mathcal{C} sont les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (x, y, z) \in \mathcal{C} \\ \nabla f(x, y, z) = \lambda(1, -2, 2) \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 9 \\ 2x - 2z = \lambda \\ 2z = -2\lambda \\ -2x + 2y + z = 2\lambda \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ (x, y, z) = \lambda(-\frac{1}{2}, 1, -1) \end{cases}$$

Il y en a un et un seul : $A = (1, -2, 2)$, qui est donc l'unique extremum local éventuel de f sous la contrainte \mathcal{C} .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 58 / 91

Exercice 14 Q 2

En tout point $X \in \mathbb{R}^3$, la fonction f admet pour matrice hessienne

$$\nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

qui admet trois valeurs propres $-2, 1$ et 4 , associées à trois droites propres respectivement dirigées par les vecteurs

$$V_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui forment une base orthonormale de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On observe que \mathcal{H} est engendré par les deux vecteurs propres V_2 et V_3 , associés à des valeurs propres strictement positives, et orthogonal à V_1 . Par suite, en notant q_A la forme hessienne de f au point A ,

$$\forall H \in \mathcal{H}, \quad q_A(H) = -2 \langle H, V_1 \rangle^2 + \langle H, V_2 \rangle^2 + 4 \langle H, V_3 \rangle^2$$

$$\geq \langle H, V_1 \rangle^2 + \langle H, V_2 \rangle^2 + \langle H, V_3 \rangle^2 = \|H\|^2$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 59 / 91

Exercice 14 Q 2

si bien que, lorsque $H \in \mathcal{H}$ tend vers 0,

$$f(A+H) - f(A) = \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_A(H) + o(\|H\|^2)$$

$$\geq \frac{1}{2} \|H\|^2 + o(\|H\|^2) = \|H\|^2 \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \geq 0.$$

Il en ressort que f présente au point A un minimum local sous la contrainte \mathcal{C} . Enfin, ce minimum est global puisque le calcul montre (sans surprise car f est polynomiale de degré 2) que le développement limité précédent est exact :

$$\forall H \in \mathcal{H}, \quad f(A+H) - f(A) = \frac{1}{2} q_A(H) \geq 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 60 / 91

Exercice 14 Q 3

Exercice 14

Question 3

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-4, +\infty[$ avec, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{U}$,

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-1 - 3x, -8 + 2y - 3z + \ln(4+z), 7 - 3y + 2z + \frac{y}{4+z} \right)$$

et

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 + \frac{1}{4+z} \\ 0 & -3 + \frac{1}{4+z} & 2 - \frac{y}{(4+z)^2} \end{pmatrix}.$$

Quant à la contrainte \mathcal{C} définie par l'équation $4x - y - z = 7$, elle est linéaire, dirigée par le plan vectoriel \mathcal{H} d'équation $4x - y - z = 0$.

On vérifie que le point $A = (1, 0, -3)$ appartient à la contrainte \mathcal{C} et que le vecteur $\nabla f(A) = (-4, 1, 1)$ est orthogonal à \mathcal{H} . Le point A est donc critique sous la contrainte \mathcal{C} .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 61 / 91

Exercice 14 Q 3

Remarque. La matrice hessienne

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

admet pour valeurs propres $-3, 0$ et 4 . Les sous-espaces propres associés sont les droites respectivement dirigées par les vecteurs ${}^t(1 \ 0 \ 0)$, ${}^t(0 \ 1 \ 1)$ et ${}^t(0 \ 1 \ -1)$.

Parmi les vecteurs propres de $\nabla^2 f(A)$, seuls les multiples non nuls de ${}^t(0 \ 1 \ -1)$ appartiennent à \mathcal{H} , associés à la valeur propre 4 , mais

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp } \nabla^2 f(A)} \dim \mathcal{H} \cap E_\lambda(\nabla^2 f(A)) = 1 < \dim \mathcal{H}$$

et cela ne suffit donc pas pour décider si f admet au point A un extremum sous la contrainte \mathcal{C} .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 62 / 91

Exercice 14 Q 3

Pour $X \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire $X = A + H$ avec $H = (h, k, \ell) \in \mathcal{H}$, le calcul donne :

$$f(A+H) - f(A) = -4h + k + \ell - \frac{3}{2}h^2 + k^2 - 3k\ell + \ell^2 + k \ln(1+\ell)$$

$$= -\frac{3}{2}h^2 + k^2 - 3k\ell + \ell^2 + k \left(\ell - \frac{\ell^2}{2} + o(\ell^2) \right)$$

$$= -\frac{3}{2}h^2 + (k - \ell)^2 - \frac{k\ell^2}{2} + o(\|H\|^3)$$

lorsque $H \rightarrow 0$.

Le long du chemin $\gamma_1 : t \mapsto A + (0, t, -t)$, inclus dans \mathcal{C} et passant par A en $t = 0$,

$$f(\gamma_1(t)) - f(A) = 4t^2 - \frac{t^3}{2} + o(t^3) \sim 4t^2 \geq 0, \quad t \rightarrow 0$$

alors que le long du chemin $\gamma_2 : t \mapsto A + (t, 2t, 2t)$, inclus dans \mathcal{C} et passant par A en $t = 0$, on a donc

$$f(\gamma_2(t)) - f(A) = -\frac{3}{2}t^2 - 4t^3 + o(t^3) \sim -\frac{3}{2}t^2 \leq 0, \quad t \rightarrow 0.$$

La fonction f ne présente donc pas d'extremum au point A sous la contrainte \mathcal{C} .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 63 / 91

Exercice 15 Q 1

Exercice 15

Question 1

Tout d'abord, \mathcal{K} est fermée comme intersection des parties suivantes :

- $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = abc\}$, fermée comme image réciproque du fermé $\{abc\}$ par l'application $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$, continue sur \mathbb{R}^3 ;
- des trois demi-espaces fermés définis par les inégalités larges $x \geq 0, y \geq 0$ et $z \geq 0$.

La partie \mathcal{K} est également bornée car si $(x, y, z) \in \mathcal{K}$, alors

$$0 \leq ax \leq ax + by + cz = abc$$

d'où $0 \leq x \leq bc$ et de même $0 \leq y \leq ac$ et de même $0 \leq z \leq ab$.

Notons que \mathcal{K} est le triangle plein de sommets $A = (bc, 0, 0)$, $B = (0, ac, 0)$ et $C = (0, 0, ab)$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 64 / 91

Exercice 15 Q 2

Exercice 15

Question 2

La fonction f , continue sur la partie \mathcal{K} fermée, bornée et non vide, admet un minimum m et un maximum M . Il s'agit en fait des extremums de f sur $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ sous la contrainte linéaire \mathcal{P} . Soient $\mathcal{H} : ax + by + cz = 0$ le sous-espace directeur du plan \mathcal{P} et $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ l'intérieur de \mathcal{A} .

La fonction f est de classe C^1 sur \mathcal{U} avec :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{U}, \quad \nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 65 / 91

Exercice 15 Q 2

Les extremums m et M sous la contrainte \mathcal{P} sont atteints sur l'intérieur \mathcal{U} ou sur le bord de \mathcal{A} .

- Si l'un d'eux est atteint sur l'intérieur \mathcal{U} , c'est en un point critique de f sous la contrainte \mathcal{P} . Or, pour $(x, y, z) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}$,

$$\nabla f(x, y, z) \in \mathcal{H}^\perp \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} yz = \lambda a \\ xz = \lambda b \\ xy = \lambda c \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ car $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Cela implique $ax = by = cz$ et plus précisément, comme $ax + by + cz = abc$, $ax = by = cz = \frac{abc}{3}$. Ainsi le seul extremum local éventuel sur \mathcal{U} sous la contrainte \mathcal{P} est en $D = \frac{1}{3}(bc, ac, ab)$, en lequel $f(D) = \frac{a^2 b^2 c^2}{27}$.

- Le bord de \mathcal{A} est constitué des quarts de plan fermés $\{0\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ (et les extremums peuvent être atteints sur son intersection avec \mathcal{P} , réunion de trois segments d'extrémités A, B et C). La fonction f y est identiquement nulle.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 66 / 91

Exercice 15 Q 2

En comparant les valeurs de f aux seuls extremums éventuels, on en déduit que f admet le maximum de f sur \mathcal{K} est égal à $M = \frac{a^2 b^2 c^2}{27}$ et atteint en D . Son minimum est égal à $m = 0$; il est atteint en tout point des segments $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, A]$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 67 / 91

Exercice 16 Q 1

Exercice 16

Question 1

L'ensemble Γ est l'intersection de l'hyperplan d'équation $g(x_1, \dots, x_n) = 1$ (car g est une forme linéaire non nulle) et des n demi-espaces fermés définis par l'une des inéquations $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$. Il est donc fermé comme intersection de fermés. Il est également borné car $(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma$ implique $0 \leq x_i \leq \frac{1}{\alpha_i}$ pour tout $i \in [1, n]$.

Dans ces conditions, la fonction continue f admet un maximum μ sur l'ensemble Γ , fermé, borné et non vide.

La fonction f prenant des valeurs strictement positives en certains points de Γ , on a nécessairement $\mu > 0$ ce qui implique que ce maximum est atteint sur $\Gamma \cap]0, +\infty[^n$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 68 / 91

Exercice 16 Q 2

Exercice 16

Question 2

Soit \mathcal{C} la contrainte linéaire $g(x_1, \dots, x_n) = 1$ et \mathcal{H} l'hyperplan vectoriel directeur, d'équation $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $\mathcal{U} =]0, +\infty[^n$ avec :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}, \quad \nabla f(X) = f(X) \left(\frac{\alpha_1}{x_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{x_n} \right).$$

D'après la question 1., μ est le maximum de f sur l'ouvert \mathcal{U} sous la contrainte linéaire \mathcal{C} . Il est donc atteint en un point critique de f sous la contrainte \mathcal{C} . Un tel point $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{C}$ vérifie $\nabla f(X) \in \mathcal{H}^\perp$, i.e.

$$f(X) \left(\frac{\alpha_1}{x_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{x_n} \right) \in \text{Vect}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

et donc, puisque $f(X) > 0, x_1 = \dots = x_n$. Sachant que $\sum_j \alpha_j x_j = 1$ avec $\sum_j \alpha_j = 1$, on en déduit que $x_1 = \dots = x_n = 1$.

D'après la remarque préliminaire, on a donc $\mu = f(1, \dots, 1) = 1$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 69 / 91

Exercice 16 Q 3

Exercice 16

Question 3

L'inégalité est immédiate pour $(x_1, \dots, x_n) = 0$. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n \setminus \{0\}$, on pose $\gamma = g(x_1, \dots, x_n) > 0$ et, pour tout $i \in [1, n], c_i = \frac{x_i}{\gamma}$. Le point $C = (c_1, \dots, c_n)$ appartient à Γ et vérifie donc d'après les questions précédentes $f(C) \leq 1$. Comme

$$f(C) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma} \right)^{\alpha_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\gamma^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}} = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)},$$

il en ressort que

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_n).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 70 / 91

Exercice 17 Q 1

Exercice 17

Question 1

Une rapide étude de la fonction $\varphi : x \mapsto x \ln x$ permet d'en dresser le tableau de variations :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
φ	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

Il en ressort que la fonction f est minorée sur \mathcal{D} : plus précisément, elle admet un minimum égal à $-3e^{-1}$ atteint en (e^{-1}, e^{-1}, e^{-1}) . Elle n'est en revanche pas majorée donc pas bornée puisque par exemple $f(x, 1, 1) = x \ln x \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 71 / 91

Exercice 17 Q 2

Exercice 17

Question 2

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{D} par opérations sur les fonctions \mathcal{C}^1 avec :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{D}, \quad \nabla f(x, y, z) = (1 + \ln x, 1 + \ln y, 1 + \ln z).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 72 / 91

Exercice 17 Q 3

Exercice 17

Question 3

Les extremums de g sont les extremums de f sous la contrainte C_a . Il s'agit d'une contrainte linéaire dirigée par le plan vectoriel \mathcal{H} d'équation $x + y + z = 0$. Par théorème, si f présente en un point (x, y, z) de l'ouvert \mathcal{D} un extremum sous la contrainte C , alors $\nabla f(x, y, z) \in \mathcal{H}^\perp = \text{Vect}(1, 1, 1)$, ce qui signifie que

$$1 + \ln x = 1 + \ln y = 1 + \ln z$$

i.e. que $x = y = z$. Conjugué à la condition $(x, y, z) \in C_a$, cela ne laisse qu'une seule possibilité : $x = y = z = a$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 73 / 91

Exercice 17 Q 4

Exercice 17

Question 4

D'après la question 3., le seul extremum éventuel pour g est le point $A = (a, a, a)$. Réciproquement, on établit grâce à la hessienne de f ou par développement limité direct que pour $H \in \mathcal{H}$, $H \rightarrow 0$,

$$g(A+H) - g(A) = \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_A(H) + o(\|H\|^2)$$

$$= \frac{1}{2a} \|H\|^2 + o(\|H\|^2) = \|H\|^2 \left(\frac{1}{2a} + o(1) \right) \geq 0$$

d'où l'on déduit que g présente un minimum local au point A .

Il n'est pas surprenant de constater que

$$\min_{C_a} f = f(A) = 3\varphi(a) \geq 3e^{-1} = \min_{\mathcal{D}} f.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 74 / 91

Exercice 17 Q 5

Exercice 17

Question 5

La contrainte C_a est explicite : elle définit $z = 3a - x - y$ en fonction de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Étudier les extremums de g revient donc à étudier ceux de

$$h : (x, y) \mapsto g(x, y, 3a - x - y) = x \ln x + y \ln y + (3a - x - y) \ln(3a - x - y)$$

sur le domaine

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : 3a - x - y > 0\},$$

ouvert comme intersection de l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ avec le demi-plan ouvert défini par $3a - x - y > 0$.

La fonction h est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert U avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla h(x, y) = (\ln x - \ln(3a - x - y), \ln y - \ln(3a - x - y)).$$

Elle admet $A' = (a, a)$ pour seul point critique, en lequel

$$\nabla^2 h(A') = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

avec $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$. Dans ces conditions, $\nabla^2 h(A')$ admet deux valeurs propres strictement positives donc h présente en A' un minimum local.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 75 / 91

Exercice 18 Q 1

Exercice 18

Question 1

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = 2(x, y).$$

La fonction $\varphi : (x, y) \mapsto xy$ est également de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla \varphi(x, y) = (y, x).$$

Elle définit une contrainte $C : \varphi(x, y) = 1$ non critique car $\nabla \varphi(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in C$.

La fonction f présente deux points critiques sous la contrainte $\varphi : A = (1, 1)$ et $B = -A$, seuls extremums locaux sous la contrainte C éventuels.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 76 / 91

Exercice 18 Q 1

Exercice 18

Question 1

Déterminer si f présente un extremum [local] sous la contrainte C au point A revient à examiner si l'expression

$$f(A+H) - f(A) = (1+h)^2 + (1+k)^2 - 2 = 2h + 2k + h^2 + k^2$$

garde un signe constant pour $H = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ [voisin de 0] tel que $A+H \in C$, i.e.

$$(1+h)(1+k) = 1 \iff h+k+hk = 0.$$

Mais dans ces conditions,

$$f(A+H) - f(A) = -2hk + h^2 + k^2 = (h-k)^2 \geq 0$$

et f présente donc un minimum global sous la contrainte C au point A .

Par parité de f et symétrie de la contrainte par rapport à l'origine, ce minimum global sous la contrainte C est aussi atteint au point B .

La fonction f ne présente pas de maximum global sous la contrainte C .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 77 / 91

Exercice 18 Q 2

Exercice 18

Question 2

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (3, 1).$$

La fonction $\varphi : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est également de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla \varphi(x, y) = 2(x, y).$$

Elle définit une contrainte $C : \varphi(x, y) = 10$ non critique car $\nabla \varphi(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in C$.

La fonction f présente deux points critiques sous la contrainte $\varphi : A = (3, 1)$ et $B = -A$, seuls extremums locaux sous la contrainte C éventuels.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 78 / 91

Exercice 18 Q 2

Exercice 18

Question 2

Déterminer si f présente un extremum [local] sous la contrainte C au point A revient à examiner si l'expression

$$f(A+H) - f(A) = 3(3+h) + 1+k - 10 = 3h+k$$

garde un signe constant pour $H = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ [voisin de 0] tel que $A+H \in C$, i.e.

$$(3+h)^2 + (1+k)^2 = 10 \iff 6h+h^2+2k+k^2=0.$$

Mais dans ces conditions,

$$f(A+H) - f(A) = -\frac{h^2+k^2}{2} \leq 0$$

et f présente donc un maximum global sous la contrainte C au point A .

On montre de même que f présente un minimum global sous la contrainte C au point B , ou on utilise l'imparité de f et la symétrie de la contrainte par rapport à l'origine.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 79 / 91

Exercice 18 Q 2

Exercice 18

Question 2

Remarques.

- La contrainte C étant fermée (comme ligne de niveau d'une fonction continue sur \mathbb{R}^2) et bornée, la fonction f y admet un maximum et un minimum, nécessairement atteints en un point critique sous la contrainte C . La fin de l'étude précédente n'est donc pas nécessaire.
- On peut aussi conclure avec le lagrangien.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 80 / 91

Exercice 18 Q 3

Exercice 18

Question 3

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = 2(-x, y).$$

La fonction $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{1}{4}x^2 + y^2$ est également de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x, 4y).$$

Elle définit une contrainte $C : \varphi(x, y) = 1$ non critique car $\nabla \varphi(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in C$.

La fonction f présente 4 points critiques sous la contrainte $\varphi : A = (0, 1)$ et $B = -A$, $C = (2, 0)$ et $D = -C$, seuls extremums locaux sous la contrainte C éventuels.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 81 / 91

Exercice 18 Q 3

- Pour $H = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A + H \in C$, i.e.

$$\frac{h^2}{4} + (1+k)^2 = 1 \iff \frac{h^2}{4} + 2k + k^2 = 0,$$
 on a :

$$f(A+H) - f(A) = 2k + k^2 - h^2 = -\frac{5}{4}h^2 \leq 0.$$
 La fonction f présente donc un maximum global sous la contrainte C au point A .
Par parité de f et symétrie de la contrainte par rapport à l'origine, ce maximum global sous la contrainte C est aussi atteint au point B .
- Pour $H = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $C + H \in C$, i.e.

$$\frac{1}{4}(2+h)^2 + k^2 = 1 \iff h + \frac{h^2}{4} + k^2 = 0,$$
 on a :

$$f(C+H) - f(C) = k^2 - 4h - h^2 = 5k^2 \geq 0.$$
 La fonction f présente donc un minimum global sous la contrainte C au point C , qui est également atteint au point D par parité.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 82 / 91

Exercice 18 Q 4

Exercice 18

Question 4

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \nabla f(x, y) = (-3x^2, 1).$$

La fonction $\varphi : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est également de classe \mathcal{C}^1 sur U avec :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \nabla \varphi(x, y) = (3x^2, 4y^3).$$

Elle définit une contrainte $C : \varphi(x, y) = 1$ non critique car $\nabla \varphi(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in C$.

La fonction f présente un unique point critique sous la contrainte $\varphi : A = (0, 1)$, unique extremum local éventuel sous la contrainte C .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 83 / 91

Exercice 18 Q 4

Pour $H = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A + H \in U \cap C$, i.e. $k > -1$ et $h^2 + (1+k)^4 = 1$, il s'agit de déterminer si l'expression

$$f(A+H) - f(A) = k - h^3 = k - 1 + (1+k)^4$$

garde un signe constant lorsque H est voisin de 0. Or, lorsque $H \rightarrow 0$,

$$f(A+H) - f(A) = k - 1 + (1 + 4k + o(k)) = 5k + o(k) \sim 5k$$

change de signe en 0.

Le point A n'est donc pas un extremum local sous la contrainte C pour f , qui n'en admet donc aucun.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 84 / 91

Exercice 19 Q 1.a

Exercice 19

Question 1.a

La fonction q_A est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 car polynomiale.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 85 / 91

Exercice 19 Q 1.b

Exercice 19

Question 1.b

On a :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(X) = {}^t X A X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} q_A(X) &= a_{k,k} x_k^2 + \sum_{i=k, j \neq k} a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i \neq k, j=k} a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i \neq k, j \neq k} a_{i,j} x_i x_j \\ &= a_{k,k} x_k^2 + 2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} a_{k,j} x_k x_j + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq k, j \neq k}} a_{i,j} x_i x_j \end{aligned}$$

d'où

$$\partial_k q_A(X) = 2a_{k,k} x_k + 2 \sum_{j \neq k} a_{k,j} x_j = 2 \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j.$$

Par suite,

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla q_A(X) = 2AX.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 86 / 91

Exercice 19 Q 1.b

Remarque. Si l'on s'autorise à utiliser le théorème de diagonalisabilité des matrices symétriques, on peut mener ce calcul de manière plus subtile.

Soit en effet $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de la matrice A symétrique réelle, respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. En notant (ξ_1, \dots, ξ_n) les coordonnées d'un vecteur $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans la base \underline{V} , on a

$$X = \sum_{j=1}^n \xi_j V_j \quad \text{et} \quad AX = \sum_{j=1}^n \xi_j A V_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j V_j$$

d'où, vu l'expression du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en base orthonormale,

$$q_A(X) = \langle AX, X \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j^2.$$

Les coordonnées du gradient $\nabla q_A(X)$ dans la base orthonormale \underline{V} sont alors données par

$$\langle \nabla q_A(X), V_k \rangle = \partial_{V_k} q_A(X) = 2\lambda_k \xi_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

ce qui permet de retrouver

$$\nabla q_A(X) = 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k V_k = 2AX.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 87 / 91

Exercice 19 Q 2.a

Exercice 19

Question 2.a

La fonction q_A est continue sur la partie S fermée, bornée et non vide. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, q_A admet un minimum α et un maximum β .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 88 / 91

Exercice 19

Question 2.b

Le résultat est clair pour $X = 0$. Pour $X \neq 0$, le vecteur $\frac{1}{\|X\|}X$ appartient à \mathcal{S} d'où, d'après **a.**,

$$\alpha \leq q_A\left(\frac{1}{\|X\|}X\right) \leq \beta$$

i.e., puisque $q_A\left(\frac{1}{\|X\|}X\right) = \frac{1}{\|X\|^2}q_A(X)$,

$$\alpha \|X\|^2 \leq q_A(X) \leq \beta \|X\|^2.$$

En appliquant cette inégalité à un vecteur X propre pour A associé à une valeur propre λ , on obtient $\alpha \|X\|^2 \leq \lambda \|X\|^2 \leq \beta \|X\|^2$ d'où $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ puisque $X \neq 0$. Ainsi les valeurs propres de A appartiennent toutes à $[\alpha, \beta]$.

Remarque. Cette approche permet de justifier, sans passer par les valeurs propres de A , que si la forme quadratique q_A est définie-positive, alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $q_A(X) \geq \alpha \|X\|^2$. Cette méthode pourra en particulier être intéressante dans le contexte de l'optimisation sous contrainte linéaire.

Exercice 19

Question 2.c

L'ensemble \mathcal{S} définit une contrainte associée à la fonction $\varphi : X \mapsto \|X\|^2$. La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n avec $\nabla\varphi(X) = 2X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. La contrainte \mathcal{S} est non critique car $\nabla\varphi(X) \neq 0$ pour $\|X\| = 1$.

Si $X \neq 0$ réalise l'égalité dans l'inégalité $\alpha \|X\|^2 \leq q_A(X)$, alors q_A présente au point $Y = \frac{1}{\|X\|}X$ un minimum sous la contrainte \mathcal{S} . Ce point Y est donc critique sous la contrainte \mathcal{S} : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla q_A(Y) = \lambda \nabla\varphi(Y)$ i.e. $AY = \lambda Y$ d'après **1.b.** On a alors $\alpha = q_A(Y) = \lambda$ si bien que le vecteur $X \neq 0$, qui vérifie donc $AX = \alpha X$, est propre pour A associé à la valeur propre α . La réciproque est claire.

On procède de même pour l'autre inégalité.

Exercice 19

Question 2.d

Les réels α et β (éventuellement égaux) sont valeurs propres de A d'après **c.** puisqu'il existe des vecteurs unitaires réalisant chacune des deux égalités d'après **a.**

Vu l'encadrement des valeurs propres de A établi en **b.**, il en ressort que α et β sont respectivement les plus petite et plus grande valeurs propres de A .