Travaux dirigés

Endomorphismes et matrices symétriques

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

Exercice 1

On commence par calculer, pour $x, y \in E$,

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x + \langle x, a \rangle\, b, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, a \rangle \langle b, y \rangle$$

- Si la famille (a, b) est liée, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b = \lambda a$ (car $a \neq 0$) et l'expression précédente de $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle$ étant alors symétrique en x, y, l'endomorphisme φ est symétrique.
- Réciproquement, si φ est symétrique, alors l'égalité $\langle \varphi(a), b \rangle = \langle a, \varphi(b) \rangle$ s'écrit :
$$\langle a, b \rangle + \|a\|^2 \|b\|^2 = \langle a, b \rangle + \langle a, b \rangle^2$$
ou encore $\langle a, b \rangle^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$ et traduit donc l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui implique que la famille (a, b) est liée.

Exercice 2

Question 1

L'application est clairement bilinéaire et symétrique. De plus, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2 \,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et, si l'égalité est réalisée, alors la fonction $t \longmapsto P(t)^2$, continue et positive, est identiquement nulle sur $[-1, 1]$; cela fait une infinité de racines pour le polynôme P, qui est donc nul. Ainsi l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie-positive et constitue donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2

Question 2

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, une intégration par parties en dérivant $t \longmapsto Q(t)$ et en primitivant $t \longmapsto 2tP'(t) + (t^2 - 1)P''(t)$ montre que :

$$\begin{aligned}\langle \varphi(P), Q \rangle &= \int_{-1}^{1} (2tP'(t) + (t^2-1)P''(t))\, Q(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

présente une expression symétrique en P, Q et l'endomorphisme φ est donc symétrique.

Exercice 3

Question 1

L'application f est définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, linéaire par bilinéarité du produit scalaire, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Par ailleurs pour $x, y \in E$, l'expression

$$\begin{aligned}\langle f(x), y \rangle &= \langle \langle u_1, x \rangle\, u_2 + \langle u_2, x \rangle\, u_1, y \rangle \\ &= \langle u_1, x \rangle \langle u_2, y \rangle + \langle u_2, x \rangle \langle u_1, y \rangle\end{aligned}$$

est symétrique en x, y. On a donc $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ et l'endomorphisme f est symétrique.

Exercice 3

Question 2

Noyau de f

Pour $x \in E$, on a :

$$f(x) = 0 \iff \langle u_1, x \rangle\, u_2 + \langle u_2, x \rangle\, u_1 = 0 \iff \begin{cases} \langle u_1, x \rangle = 0 \\ \langle u_2, x \rangle = 0 \end{cases}$$

car la famille (u_1, u_2) est libre. Ainsi $\operatorname{Ker} f = H^\perp$.

Image de f

Par ailleurs, on remarque immédiatement sur la définition de f que $\operatorname{Im} f \subset H$. En ajoutant d'après le théorème du rang que :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim H^\perp = \dim H,$$

l'inclusion précédente est donc une égalité : $\operatorname{Im} f = H$.

Exercice 3

Question 3.a

On a bien sûr $f(H) \subset \operatorname{Im} f = H$. Le sous-espace vectoriel H est donc stable par f, qui induit donc sur H un endomorphisme

$$g : H \longrightarrow H, x \longmapsto f(x).$$

Exercice 3

Question 3.b

Le calcul donne immédiatement

$$g(u_1) = \|u_1\|^2\, u_2 + \langle u_2, u_1 \rangle\, u_1$$

et

$$g(u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle\, u_2 + \|u_2\|^2\, u_1$$

d'où l'on déduit la matrice représentative de g en base (u_1, u_2) :

$$\begin{pmatrix} \langle u_2, u_1 \rangle & \|u_2\|^2 \\ \|u_1\|^2 & \langle u_1, u_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Question 3.c

Soient

$$v_1 = \|u_2\|\, u_1 - \|u_1\|\, u_2 \quad \text{et} \quad v_2 = \|u_2\|\, u_1 + \|u_1\|\, u_2.$$

- Par identité remarquable,
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \big\|\|u_2\|\, u_1\big\|^2 - \big\|\|u_1\|\, u_2\big\|^2 = \|u_2\|^2\, \|u_1\|^2 - \|u_1\|^2\, \|u_2\|^2 = 0.$$
- Ainsi la famille (v_1, v_2) est orthogonale formée de vecteurs non nuls (car (u_1, u_2) est libre) donc libre. Formée de deux vecteurs de l'espace H de dimension 2, c'en est donc une base orthogonale.

Le calcul donne :

$$g(v_1) = \|u_2\|\, f(u_1) - \|u_1\|\, f(u_2) = \big(\langle u_1, u_2 \rangle - \|u_1\|\, \|u_2\|\big)\, v_1$$

et de même

$$g(v_2) = \big(\langle u_2, u_1 \rangle + \|u_1\|\, \|u_2\|\big)\, v_2.$$

L'endomorphisme g est donc représenté en base (v_1, v_2) par la matrice

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_2 \rangle - \|u_1\|\, \|u_2\| & 0 \\ 0 & \langle u_1, u_2 \rangle + \|u_1\|\, \|u_2\| \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Question 3.d

D'après la question précédente, l'endomorphisme g présente deux valeurs propres

$$\langle u_1, u_2 \rangle - \|u_1\|\, \|u_2\| \quad \text{et} \quad \langle u_1, u_2 \rangle + \|u_1\|\, \|u_2\|,$$

qui sont donc également valeurs propres de f. Parmi elles, l'une est strictement positive et l'autre strictement négative ; en effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui est stricte puisque la famille (u_1, u_2) est libre, on a :

$$|\langle u_1, u_2 \rangle| < \|u_1\|\, \|u_2\|.$$

Par ailleurs, 0 est également valeur propre puisque $\operatorname{Ker} f = H^\perp \neq \{0\}$. L'espace $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, l'endomorphisme f présente donc exactement trois valeurs propres dont une strictement négative, une nulle et une strictement positive.

Remarque. La même conclusion vaut encore pour le même endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension supérieure ou égale à 3.

Exercice 4

- Les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux. En effet, pour $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $z \in E$ tel que $y = f(z)$ et alors, puisque f est symétrique,
$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = \langle f(x), z \rangle = \langle 0, z \rangle = 0.$$
- La somme $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$, orthogonale comme on vient de le voir, est donc directe. De plus, le théorème du rang assure que
$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E,$$
et les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont donc supplémentaires orthogonaux.

Exercice 5

Par hypothèse, le polynôme X^p annule A. La matrice A admet donc pour seule valeur propre *éventuelle* 0. Mais cela ne suffit pas pour en déduire que $A = 0$; contre-exemple ?

Concernant S, on a tout d'abord $S^p = ({}^tAA)^p = {}^tA^pA^p = 0$ car A commute avec ${}^tA$ et $A^p = 0$ par hypothèse.
Ainsi S est nilpotent comme A donc admet 0 comme seule valeur propre éventuelle. Mais S est de plus symétrique réelle donc diagonalisable. Elle est donc semblable à la matrice nulle donc elle-même nulle.

On a alors, en considérant la structure euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|^2 = \operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr} S = 0,$$

d'où l'on déduit que $A = 0$.

Exercice 6

Question 1

La matrice A est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable avec des sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux. On en détermine les valeurs propres : pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_4) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow 2L_1 + (2-\lambda)L_2}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 2 & 2\lambda - 4 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow (4-\lambda)L_1 - (2\lambda-4)L_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha} & 0 \\ \mathbf{-2} & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & \mathbf{4-\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{si } \lambda \neq 4$$

(en gras les coefficients « diagonaux »), où

$$\alpha = -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6).$$

On observe ainsi que $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3$ lorsque λ vaut 0, 3 ou 6, qui sont donc les trois valeurs propres de A (qui ne peut en admettre plus : inutile de revenir sur le cas $\lambda = 4$). La matrice A admet donc trois droites propres que l'on détermine en résolvant les systèmes linéaires correspondants, en réinvestissant les calculs précédents (c'est-à-dire en appliquant aux équations du système $AX = \lambda X$ les mêmes opérations qu'aux lignes de la matrice $A - \lambda I_3$).
Par exemple, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = 0 \iff \begin{cases} -2x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}.$$

On obtient ainsi les droites propres :

- dirigée par $V_1 = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre 0 ;
- dirigée par $V_2 = {}^t\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre 3 ;
- dirigée par $V_3 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre 6.

La famille (V_1, V_2, V_3) est automatiquement orthogonale car les vecteurs V_i dirigent les trois droites propres qui sont deux-à-deux orthogonales puisque A est symétrique. En normalisant les vecteurs V_i, on obtient donc une base orthonormale (W_1, W_2, W_3) de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. La matrice de passage

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

de la base canonique à la base (W_1, W_2, W_3) est donc orthogonale et vérifie, d'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Question 2

La matrice A est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable avec des sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux. Il est possible d'en déterminer les valeurs propres classiquement : pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_4) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+(1-\lambda)L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2+2L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & -\lambda & \lambda^2-2\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1+2L_2-L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-7) \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_4) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-7) \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & -2\lambda \\ -1 & -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{cases} 4 & \text{si } \lambda \notin \{0,7\} \\ 3 & \text{si } \lambda = 7 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Mais il est plus rapide de remarquer que $\operatorname{rg} A = 1$ si bien que 0 est valeur propre avec, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à A, un sous-espace propre de dimension $\dim E_0(A) = 4 - \operatorname{rg} A = 3$.
La matrice A étant par ailleurs diagonalisable, elle est donc semblable à une matrice $D = \operatorname{diag}(0, 0, 0, \lambda)$, où λ est la dernière valeur propre de A. Les matrices A et D, semblables, ont la même trace, ce qui donne la valeur de $\lambda = \operatorname{tr} A = 7$.

La matrice A admet donc deux valeurs propres :

- la valeur propre 0, avec pour sous-espace propre l'hyperplan d'équation $x + 2y - z - t = 0$.
  Pour construire une base orthonormale de $E_0(A)$, on en détermine une base à laquelle on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Partant de la base formée des vecteurs

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient tout d'abord une base orthogonale en posant $W_1 = U_1$ avec $\|W_1\| = \sqrt{5}$ puis (étant donné que $U_1 \perp U_2$) $W_2 = U_2$ avec $\|W_2\| = \sqrt{2}$ et

$$W_3 = U_3 - \frac{\langle W_1, U_3 \rangle}{\|W_1\|^2} W_1 - \frac{\langle W_2, U_3 \rangle}{\|W_2\|^2} W_2 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

avec $\|W_3\| = \sqrt{\frac{7}{10}}$.
En normalisant ces vecteurs, on obtient une base orthonormale (V_1, V_2, V_3) de $E_0(A)$.

- la valeur propre 7, avec pour sous-espace propre la droite dirigée par le vecteur ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ normal à $E_0(A)$.
  Le vecteur
  $$V_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
  constitue une base orthonormale de la droite $E_7(A)$.

Les sous-espaces propres de A étant supplémentaires orthogonaux, la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) ainsi construite est une base orthonormale de $\mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de colonnes propres de A. La formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à A donne donc :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

où la matrice

$$P = \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{14} & 0 & 2 & \sqrt{10} \\ -\sqrt{14} & 0 & 4 & 2\sqrt{10} \\ 0 & \sqrt{35} & 5 & -\sqrt{10} \\ 0 & -\sqrt{35} & 5 & -\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

est orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormales.

Exercice 7

Question 1

Les matrices A et B sont symétriques réelles donc diagonalisables. On peut ajouter que les sous-espaces propres de chacune d'elles sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ euclidien canonique.

Exercice 7

Question 2

- Le calcul donne $A^2 = 4A$. Ainsi le polynôme $X^2 - 4X = X(X-4)$ est annulateur de A. Ses racines 0 et 4 sont donc les seules valeurs propres éventuelles de A.
  La matrice A étant diagonalisable mais non diagonale, elle admet au moins deux valeurs propres. Les deux réels 0 et 4 sont donc tous deux valeurs propres de A.
  La matrice A admet donc 0 et 4 pour valeurs propres.
- On raisonne de même sur la matrice B qui vérifie $B^2 = 2B$ et admet 0 et 2 pour valeurs propres.

Exercice 7

Question 3

Sous-espaces propres de la matrice A

- pour la valeur propre 0 : l'hyperplan d'équation $x + y + z + t = 0$;
- pour la valeur propre 4 : $E_4(A) = E_0(A)^{\perp}$, i.e. la droite dirigée par ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sous-espaces propres de la matrice B

- pour la valeur propre 0 : le sous-espace de dimension 2 de base formée par les vecteurs ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- pour la valeur propre 2 : le sous-espace de dimension 2 de base formée par les vecteurs ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Question 4

On étudie les intersections d'un sous-espace propre de A avec un sous-espace propre de B :

- $E_4(A) \cap E_0(B) = E_4(A)$ est la droite dirigée par $u_1 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;
- $E_4(A) \cap E_2(B) = \{0\}$;
- $E_0(A) \cap E_2(B) = E_2(B)$ est le plan dirigé par les vecteurs
$$u_2 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = {}^t\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \; ;$$
- $E_0(A) \cap E_0(B)$ est la droite dirigée par $u_4 = {}^t\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Les quatre vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 ainsi obtenus sont propres pour a et b. Par ailleurs, les intersections précédentes sont deux-à-deux orthogonales puisqu'il en va ainsi des sous-espaces propres de A (resp. de B). Comme de plus (coup de bol !) u_2 et u_3 sont orthogonaux, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est orthogonale.

Après normalisation, on obtient quatre vecteurs
$$e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0),$$
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1), \quad e_4 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$$
formant une base $\underline{e}$ orthonormale de $\mathbb{R}^4$. Ces vecteurs étant propres pour les endomorphismes a et b, ceux-ci sont représentés en base $\underline{e}$ par les matrices diagonales :
$$\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Question 1

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable : il existe $P \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} = D.$$
On a alors $A = PDP^{-1}$ d'où $A^2 = PD^2P^{-1}$ et, puisque deux matrices semblables ont même trace,
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \|A\|^2 = \operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr} D^2 = \|D\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Exercice 8

Question 2

L'endomorphisme symétrique p est représenté en base orthonormale $\underline{e}$ par une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ où $\lambda_i = 1$ pour tout $i \leqslant r = \operatorname{rg} p$ et $\lambda_i = 0$ pour tout $i > r$. En effet, dans une base adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, le projecteur p est représenté par la matrice par blocs $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$.
Par ailleurs, la norme du vecteur $p(e_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est donnée par ses coordonnées $a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ en base orthonormale $\underline{e}$:
$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \|p(e_j)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2.$$
Le résultat de la question **1.** donne alors :
$$\sum_{j=1}^n \|p(e_j)\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = r = \operatorname{rg} p.$$

Exercice 9

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et X, Y les matrices colonnes qui leur sont canoniquement associées, on a :
$$\langle f(x), f(y)\rangle = {}^t(AX)AY = {}^tX{}^tAAY = \langle x, g(y)\rangle.$$
L'endomorphisme g étant représenté en base canonique, orthonormale, par la matrice symétrique ${}^tAA$, c'est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. À ce titre, il est diagonalisable en base orthonormale : il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de g. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, on a alors d'après le calcul préliminaire :
$$\forall i \neq j \in [\![1,n]\!], \quad \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, g(e_j)\rangle = \langle e_i, \lambda_j e_j\rangle = \lambda_j \langle e_i, e_j\rangle = 0,$$
si bien que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est orthogonale.

Exercice 10

Remarque. La forme quadratique
$$q : X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tXSX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j}x_ix_j$$
est continue par opérations sur les fonctions continues.

Par ailleurs,
$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \frac{1}{\|X\|^2} q(X) = q\left(\frac{X}{\|X\|}\right)$$
où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Il s'agit donc d'étudier q sur la sphère unité $\mathcal{S} = \{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \|X\| = 1\}$. Cette partie étant fermée (comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $X \longmapsto \|X\|$), bornée et non vide, la fonction continue q y est bornée et atteint ses bornes, ce qui justifie l'existence de
$$\sup_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \max_{X \in \mathcal{S}} q(X).$$

La matrice S étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. Plus précisément, il existe deux matrices P orthogonale et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}SP = D$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S. Quitte à réordonner les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de P, on peut supposer $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

Pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et $Y = {}^tPX$, on a alors
$${}^tXSX = {}^tXPDP^{-1}X = {}^t({}^tPX)D{}^tPX = {}^tYDY.$$
puisque P est orthogonale. On a de même :
$${}^tXX = {}^t(PY)(PY) = {}^tY({}^tPP)Y = {}^tYY.$$
En s'appuyant sur la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on remarque enfin que $X \neq 0$ implique ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$.

En notant $Y = {}^t\begin{pmatrix}y_1 & \cdots & y_n\end{pmatrix}$, il vient :
$${}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda_n {}^tYY$$
d'où :
$$\frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \frac{{}^tYDY}{{}^tYY} \leqslant \lambda_n,$$
avec égalité pour Y le n-ième vecteur de la base canonique, c'est-à-dire pour $X = C_n$.
Il en résulte que :
$$\sup_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leqslant \lambda_n = \max(\operatorname{Sp} S)$$
et l'on montrerait de même que :
$$\inf_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \lambda_1 = \min(\operatorname{Sp} S)$$

Exercice 12

Question 1.a

On justifie seulement, pour $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, l'équivalence : M est définie-positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

On suppose M définie-positive :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^tXMX > 0.$$

Soit λ une valeur propre de M. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$.
On a alors ${}^tXMX = \lambda {}^tXX$ d'où

$$\lambda = \frac{{}^tXMX}{{}^tXX} > 0$$

car ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, on suppose les valeurs propres de M strictement positives.

Comme M est symétrique réelle, il existe alors une matrice $P \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}MP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ soit diagonale, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de M, strictement positives par hypothèse.
Pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = {}^tPX = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$, on a alors

$${}^tXMX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t({}^tPX)D{}^tPX = {}^tYDY.$$

Si $X \neq 0$, alors $Y \neq 0$ (car P inversible) donc il existe i_0 tel que $y_{i_0} \neq 0$ si bien, comme $\lambda_i > 0$ pour tout i, que

$${}^tXMX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geqslant \lambda_{i_0} y_{i_0}^2 > 0$$

et M est définie-positive.

Exercice 12

Question 1.b

Sachant que 0 est valeur propre d'une matrice si, et seulement si, cette matrice n'est pas inversible, on déduit de la question **a.** qu'une matrice symétrique est positive inversible si, et seulement si, elle est définie-positive.

Si M symétrique est définie-positive, alors il existe $P \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

pour des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.
On a alors

$$M^{-1} = P\,\mathrm{diag}\Big(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\Big)P^{-1}$$

si bien que la matrice M^{-1} admet pour valeurs propres $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$, toutes strictement positives. Elle est donc symétrique (vérification facile) définie-positive.

Exercice 12

Question 2.a

Puisque M est symétrique réelle, il existe une base orthonormale $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, toutes positives ou nulles d'après **1.a.** puisque M est positive, on a alors :

$$M = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i {}^tX_i.$$

Remarque. Si P désigne la matrice de passage de la base canonique à la base $(X_1, \dots, X_n)$, orthogonale car les deux bases sont orthonormales, la formule précédente équivaut à :

$$M = PD{}^tP \quad \text{où} \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Exercice 12

Question 2.b

On a tout d'abord

$${}^tL = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}\,{}^t({}^tX_i){}^tX_i = L$$

donc L est symétrique puis, pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXLX = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}({}^tXX_i)({}^tX_iX) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}\,\langle X, X_i\rangle^2 \geqslant 0$$

où l'on a noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc L est positive.
Enfin,

$$\begin{aligned} L^2 &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \sqrt{\lambda_i\lambda_j} X_i({}^tX_iX_j){}^tX_j = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \sqrt{\lambda_i\lambda_j}\,\langle X_i, X_j\rangle\, X_i{}^tX_j \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i{}^tX_i = M \end{aligned}$$

car la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est orthonormale.

Remarque. La formule définissant L est équivalente à la formule ci-dessous, sur laquelle on aurait pu retrouver le résultat :

$$L = P\Delta{}^tP \quad \text{où} \quad \Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

En effet, la formule ci-dessus donne immédiatement ${}^tL = L$ et montre que L admet pour valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$, toutes positives. Enfin,

$$L^2 = P\Delta{}^tPP\Delta{}^tP = P\Delta^2{}^tP = PD{}^tP = M$$

puisque P est orthogonale.

Exercice 12

Question 2.c

Tout d'abord la matrice $\sqrt{M}$ est inversible : en effet, pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\sqrt{M}X = 0$ implique $MX = \sqrt{M}\sqrt{M}X = 0$ donc $X = 0$ puisque M est inversible.

Il suffit alors de vérifier que la matrice $N = \sqrt{M}^{-1}$ est symétrique positive telle que $N^2 = M^{-1}$.

- Elle est symétrique positive d'après la question **1.b.** comme inverse de la matrice symétrique positive inversible $\sqrt{M}$.
- On a $N^2 = \sqrt{M}^{-1}\sqrt{M}^{-1} = (\sqrt{M}\sqrt{M})^{-1} = M^{-1}$.

Exercice 13

Question 1

L'identité, plus généralement toute homothétie $f = \lambda\,\mathrm{id}_E$ de rapport λ tel que $|\lambda| \leqslant 1$ sont des contractions :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \leqslant \|x\|.$$

Exercice 13

Question 2.a

On raisonne par double implication.

- Si f est une contraction et λ une valeur propre de f, il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$ et alors
$$\|x\| \geqslant \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$$
d'où, puisque $\|x\| > 0$ car $x \neq 0$, $|\lambda| \leqslant 1$. La condition est donc nécessaire.
- Réciproquement, on suppose la condition satisfaite.
Puisque l'endomorphisme f est symétrique, il existe une base orthonormale $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, telles que $|\lambda_i| \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par hypothèse.

Pour $x \in E$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\underline{e}$, on a alors :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$$
d'où, vu l'expression de la norme en base orthonormale :
$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2,$$
et par suite $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$: f est une contraction.

Exercice 13

Question 2.b

On conserve les notations de la question précédente. En notant
$$\Lambda_P = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |P(\lambda_i)|,$$
on a de même :
$$P(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(f)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\lambda_i) e_i$$
d'où :
$$\|P(f)(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(\lambda_i)^2 \leqslant \Lambda_P^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \Lambda_P^2 \|x\|^2$$
d'où l'inégalité demandée.

Exercice 13

Question 3.a

On vérifie que :

- ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM$ donc ${}^tMM$ est symétrique ;
- pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX({}^tMM)X = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
- pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tX({}^tMM)X = 0$, on a $\|MX\| = 0$ d'où $MX = 0$ et, comme M est inversible, $X = 0$.

La matrice ${}^tMM$ est donc définie-positive.

Il existe donc une matrice $P \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ strictement positifs telles que ${}^tMM = PD\,{}^tP$.
À partir de $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, on construit alors une matrice $S = P\Delta\,{}^tP$ vérifiant les propriétés suivantes :

- S est symétrique : ${}^tS = {}^t(P\Delta\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\Delta\,{}^tP = S$;
- S est définie-positive car elle est semblable (P est orthogonale) à Δ donc admet pour valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$, toutes strictement positives ;
- enfin, $S^2 = P\Delta\,{}^tPP\Delta\,{}^tP = P\Delta^2\,{}^tP = PD\,{}^tP = {}^tMM$ car P est orthogonale.

Remarque. On a utilisé la caractérisation des matrices définies-positives parmi les matrices symétriques établie dans la question **1.a.** de l'exercice 10. Elle est également conséquence du corollaire 2.14 du cours.

Exercice 13

Question 3.b

Il s'agit de vérifier que la matrice $\Omega = MS^{-1}$ est orthogonale. Or
$${}^t\Omega\Omega = {}^t(S^{-1})\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n,$$
d'où le résultat.

Exercice 13

Question 3.c

Soient (Ω_1, S_1) et (Ω_2, S_2) deux couples formés d'une matrice Ω_i orthogonale et d'une matrice S_i symétrique définie-positive tels que $M = \Omega_i S_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.
On a alors $S_1^2 = {}^tMM = S_2^2$ puisque Ω_i est orthogonale.

Comme S_1 est symétrique réelle, il existe une base orthonormale $X_1, \ldots, X_n$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S_1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ donné, on a :
$$S_2^2 X_i = S_1^2 X_i = \lambda_i^2 X_i$$
soit
$$0 = (S_2^2 - \lambda_i^2 I_n)X_i = (S_2 + \lambda_i I_n)(S_2 - \lambda_i I_n)X_i$$
où $S_2 + \lambda_i I_n$ est inversible puisque $-\lambda_i \leqslant 0$ n'est pas valeur propre de la matrice définie-positive S_2. Par suite, $(S_2 - \lambda_i I_n)X_i = 0$ i.e. $S_2 X_i = \lambda_i X_i$.
Ainsi $S_1 X_i = S_2 X_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et, comme $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il en résulte que $S_1 = S_2$. On a alors $\Omega_i = MS^{-1}$ d'où l'unicité du couple (Ω, S).

Exercice 13

Question 3.d

Soient ω et s les endomorphismes de E représentés par les matrices Ω et S en base $\underline{e}$. Pour $x \in E$ et X la matrice colonne de ses coordonnées en base $\underline{e}$, on a, sachant la matrice Ω orthogonale :
$$\|\omega(x)\|^2 = {}^t(\Omega X)(\Omega X) = {}^tX\,{}^t\Omega\Omega X = {}^tXX = \|x\|^2$$
d'après l'expression de la norme en base orthonormale. Ainsi ω préserve la norme (on dit que c'est une isométrie), d'où :
$$\|f(x)\| = \|\omega(s(x))\| = \|s(x)\|.$$

Par suite, f est une contraction si, et seulement si, s est une contraction c'est-à-dire, d'après la question **2.a.**, si, et seulement si, pour toute valeur propre λ de s, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 14
Question 1.a

Par construction, l'application φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est linéaire par linéarité de l'intégrale. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 14
Question 1.b

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la relation $\varphi(P) = 0$ équivaut à

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \int_0^1 P(t) t^k \,\mathrm{d}t = 0. \qquad (*)$$

Cela signifie que P est orthogonal aux monômes $1, X, \dots, X^n$ pour le produit scalaire

$$(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \langle Q_1, Q_2 \rangle = \int_0^1 Q_1(t) Q_2(t) \,\mathrm{d}t.$$

Il est alors orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}_n[X]$, donc en particulier à lui-même, ce qui implique $P = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ et φ est injective.

Remarque. Ce raisonnement peut être mené « à la main » : si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ alors, en multipliant $(*)$ par a_k puis en sommant, on obtient

$$\int_0^1 P(t)^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 P(t) t^k \,\mathrm{d}t = 0,$$

d'où l'on déduit que la fonction $t \longmapsto P(t)^2$, continue et positive, est identiquement nulle sur $[0, 1]$. Le polynôme P, qui admet ainsi une infinité de racines, est donc nul.

Exercice 14
Question 2.a

La matrice M a pour coefficient générique

$$m_{i,j} = \int_0^1 t^j t^i \,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+j+1}, \qquad 0 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Elle est donc symétrique réelle, et par suite diagonalisable.

Exercice 14
Question 2.b

Il vient :

$$\begin{aligned} {}^tUMU = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} u_i u_j &= \int_0^1 \Big(\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} u_i u_j t^{i+j} \Big) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{i=0}^n u_i t^i \Big)^2 \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 14
Question 3

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de M et si $U \in \mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ est une colonne propre associée, on a donc

$$0 \leqslant {}^tUMU = \lambda {}^tUU = \lambda \|U\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Comme $U \neq 0$, on en déduit que $\lambda \geqslant 0$. Enfin, M étant inversible d'après **1.b.**, 0 n'en est pas valeur propre et l'on peut donc conclure que toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

Remarque. On peut aussi s'appuyer sur le cours en remarquant que d'après **2.b.**, la forme bilinéaire canoniquement associée à la matrice symétrique M est positive. Dans ces conditions, toutes les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

Exercice 14
Question 4

Puisque M est diagonalisable, sa trace est somme de ses valeurs propres répétées avec multiplicité (i.e. autant de fois qu'elles figurent sur la diagonale d'une matrice diagonale semblable à M). En notant λ_n la plus petite des valeurs propres de M, on a donc :

$$(n+1)\lambda_n \leqslant \operatorname{tr} M = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$$

d'où par comparaison série-intégrale :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \lambda_n &\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1} \Big(1 + \sum_{k=2}^{2n+1} \int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big) \\ &\leqslant \frac{1 + \ln(2n+1)}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \end{aligned}$$

On en déduit par encadrement que λ_n tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Exercice 15
Question 1

L'endomorphisme f étant symétrique, il existe une base orthonormale $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, positives ou nulles puisque f est positif :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad 0 \leqslant \langle e_i, f(e_i) \rangle = \lambda_i \|e_i\|^2 = \lambda_i.$$

Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\underline{e}$. On a :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$$

d'où, d'après l'expression du produit scalaire en base orthonormale,

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

La condition $\langle x, f(x)\rangle = 0$ est clairement nécessaire pour que $x \in \operatorname{Ker} f$ i.e. $f(x) = 0$. Réciproquement, les termes de la somme étant positifs, si $\langle x, f(x)\rangle = 0$ alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i x_i^2 = 0$ c'est-à-dire $\lambda_i = 0$ ou $x_i = 0$ si bien que $f(x) = \sum_i \lambda_i x_i e_i = 0$ i.e. $x \in \operatorname{Ker} f$.

Remarque. Si l'on ordonne les λ_i pour que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ et $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ soient non nuls, alors $\operatorname{Ker} f$ est le sous-espace de base $(e_1, \ldots, e_p)$.

Exercice 15
Question 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à S. Comme il est représenté en base canonique, orthonormale, par la matrice $S \in \mathbf{S}_n^+(\mathbb{R})$, il est symétrique positif.
Pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$, on a

$$\langle Y, f(Y)\rangle = \langle Y, SY\rangle = {}^tYSY = {}^tX{}^tASAX = 0$$

par hypothèse d'où, d'après la question **1.**, $Y \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} S$ ce qui établit l'inclusion attendue : $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} S$.

Exercice 16
Question 1

Soit $q : X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tXAX$ la forme quadratique canoniquement associée à la matrice A.
Pour $X \in \mathbb{R}$, on a

$$q(X) = {}^tXAX = {}^t({}^tXAX) = {}^tX{}^tAX = -{}^tXAX = -q(X)$$

puisque A est antisymétrique, d'où l'on déduit que $q(X) = 0$.

Exercice 16
Question 2

Si $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est tel que $(S + A)X = 0$, alors

$$0 = {}^tX(S + A)X = {}^tXSX + {}^tXAX = {}^tXSX.$$

Comme la matrice S est définie-positive, cela implique $X = 0$.

La matrice $S + A$ est donc inversible.

Exercice 17
Question 1

On obtient $M_aU_i = \lambda_iU_i$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, où

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3 + a\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 3 - a\sqrt{2}.$$

En d'autres termes, les colonnes U_1, U_2 et U_3 sont propres pour M_a associées aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.

Exercice 17
Question 2

La question **1.** fournit trois colonnes propres U_1, U_2 et U_3. Elles sont linéairement indépendantes car indépendantes de a et, pour $a \neq 0$, associées à des valeurs propres deux-à-deux distinctes de M_a. Ainsi la famille (U_1, U_2, U_3) est libre maximale : c'est une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de colonnes propres de M_a. La matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de la base canonique à la base (U_1, U_2, U_3) est donc inversible et vérifie, d'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à M_a :

$$P^{-1}M_aP = D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + a\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 - a\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 17
Question 3

La matrice M_a étant symétrique, la forme bilinéaire φ_a est symétrique. Elle constitue donc un produit scalaire si, et seulement si, elle est définie-positive c'est-à-dire, d'après le cours, si, et seulement si, les valeurs propres de M_a sont strictement positives, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 3 + a\sqrt{2} > 0 \\ 3 - a\sqrt{2} > 0 \end{cases} \iff -\frac{3}{\sqrt{2}} < a < \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

On suppose ces conditions satisfaites dans la suite. On parle de φ_a-orthogonalité pour le produit scalaire φ_a et d'orthogonalité pour le produit scalaire canonique.

Les vecteurs U_1, U_2 et U_3 étant orthogonaux (car propres pour M_a symétrique, associés à des valeurs propres deux-à-deux distinctes, du moins pour $a \neq 0$), on obtient par normalisation une base orthonormale (V_1, V_2, V_3) de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, dans laquelle le produit scalaire φ_a est représenté, d'après la formule de changement de base pour les formes bilinéaires, par la matrice

$${}^tQM_aQ = Q^{-1}M_aQ = D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + a\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 - a\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

où Q est la matrice de passage de la base canonique à la base (V_1, V_2, V_3), orthogonale puisque ces deux bases sont orthonormales.

La base (V_1, V_2, V_3) est φ_a-orthogonale puisque la matrice D_a est diagonale. En normalisant ses vecteurs, on obtient donc une base φ_a-orthonormale :

$$W_1 = V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad W_2 = \frac{1}{\sqrt{3+a\sqrt{2}}}V_2 = \frac{1}{2\sqrt{3+a\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad W_3 = \frac{1}{\sqrt{3-a\sqrt{2}}}V_3 = \frac{1}{2\sqrt{3-a\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}.$$

Exercice 18

Question 2

La matrice symétrique associée à q_2 est

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -\frac{1}{2}\\1 & 1 & 0\\-\frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Symétrique réelle, cette matrice est diagonalisable avec des sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux. On en détermine les valeurs propres : pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & -\frac{1}{2}\\1 & 1-\lambda & 0\\-\frac{1}{2} & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+2(1-\lambda)L_3\\L_2\leftarrow L_2+2L_3}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\lambda^2-4\lambda+\frac{3}{2}\\0 & 1-\lambda & 2-2\lambda\\-\frac{1}{2} & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) \underset{L_2\leftarrow L_2+(\lambda-1)L_1}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\lambda^2-4\lambda+\frac{3}{2}\\0 & 0 & P(\lambda)\\-\frac{1}{2} & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix}0 & 0 & P(\lambda)\\0 & 1 & -2\lambda^2-4\lambda+\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2} & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

où

$$P(\lambda) = 2\lambda^3 - 6\lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\lambda-1)(4\lambda^2-8\lambda-1).$$

Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3$ c'est-à-dire $P(\lambda) = 0$. La matrice A admet donc pour valeurs propres 1, $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $1-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Comme la troisième est négative, la forme bilinéaire canoniquement associée à A n'est pas définie-positive et q n'est donc pas une norme euclidienne.