Convergences et approximations en probabilités

Feuille d'exercices

$\boxed{1}$ En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^x \mathbf{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

$\boxed{2}$ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon, t > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(\overline{X}_n - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{e}^{n\ln(p\mathbf{e}^t+1-p)-t(p+\varepsilon)}.$$

$\boxed{3}$ Soit X une variable aléatoire, discrète ou à densité, que l'on suppose bornée. Soit M un réel tel que $|X| \leqslant M$.

1. Justifier que X admet un moment à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout réel $a > 0$,

$$\frac{\mathbb{E}(X^2)-a^2}{M^2} \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

$\boxed{4}$ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On souhaite montrer que la convergence en probabilité de (X_n) vers X équivaut à la condition

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n-X|}\right) = 0.$$

1. Expliquer pourquoi il suffit de traiter le cas $X = 0$.

On suppose $X = 0$ dans la suite de l'exercice.

2. Montrer que la condition est suffisante.
   Indication. On pourra observer que la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et utiliser des variables aléatoires indicatrices.
3. **a.** Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_n| \geqslant \varepsilon\right) + \varepsilon.$$

   b. En déduire que la condition est nécessaire.

$\boxed{5}$ ✎ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi donnée par la densité

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \mathbf{e}^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geqslant \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où θ est un paramètre réel.

Étudier la convergence en probabilité de la suite de terme général $Y_n = \min(X_1,\ldots,X_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{6}$ ★ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_nX_{n+1}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable Y_n, son espérance et sa variance.
2. Discuter l'indépendance de Y_n et Y_m pour $n \neq m \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite de terme général

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

   converge en probabilité vers la variable certaine égale à p^2.

$\boxed{7}$ ★ 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant toutes une variance. On suppose que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = m \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0.$$

   Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.

2. On lance n fois une pièce truquée faisant apparaître pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$. On note X_n la variable donnant le nombre de piles obtenus au cours des n lancers et on pose $Y_n = \mathbf{e}^{X_n/n}$. Étudier la convergence en probabilité de la suite (Y_n).

$\boxed{8}$ ♣ On considère $n \geqslant 1$ urnes numérotées de 1 à n et $N = an$ boules numérotées de 1 à N, où a est un entier non nul. On place au hasard chacune des N boules dans une des n urnes, indépendamment les unes des autres.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on considère la variable aléatoire T_i égale à 1 si l'urne numérotée i est vide et 0 sinon. On note également Y_n le nombre d'urnes vides et $S_n = Y_n/n$.

1. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, donner la loi de T_i et préciser son espérance.
2. Pour $i,j \in [\![1,n]\!]$, calculer $\operatorname{cov}(T_i,T_j)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et sa limite lorsque $n \to \infty$.
4. Calculer $\mathbb{V}(S_n)$ et sa limite lorsque $n \to \infty$.
5. **a.** Justifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|S_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \leqslant |S_n - \mathbb{E}(S_n)| + \left|\mathbb{E}(S_n) - \mathbf{e}^{-a}\right|.$$

   b. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \mathbb{P}\left(\left|S_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

   c. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|S_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

   d. Interpréter le résultat précédent.

www.rblld.fr

9 Soient (X_n), (Y_n) deux suites de variables aléatoires et X, Y deux variables aléatoires.

1. Montrer que si (X_n) et (Y_n) convergent en probabilité respectivement vers X et Y, alors $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.
2. Montrer que si (X_n) converge en probabilité vers X et Y, alors $X = Y$ presque sûrement.

10 **Convergence presque sûre**

♣ Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On dit que la suite (X_n) converge *presque sûrement* vers X si :

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big\}\Big) = 1.$$

1. En revenant à la définition quantifiée de la limite, justifier que
$$A = \Big\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big\}$$
est un événement.
2. Prouver que si (X_n) converge presque sûrement vers X, alors (X_n) converge en probabilité vers X.
3. On considère dans cette question une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli dont les paramètres respectifs sont notés p_n, $n\in\mathbb{N}^*$.
   a. Justifier que (X_n) converge en probabilité vers 0 si, et seulement si, la suite réelle (p_n) converge vers 0.
   b. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli [1], montrer que la suite (X_n) converge presque sûrement vers 0 si, et seulement si, la série $\sum p_n$ converge.
   c. En déduire que la réciproque de l'implication étudiée en **2.** est fausse.
4. On suppose dans cette question que (X_n) converge en probabilité vers X.
   a. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement décroissantes de limite nulle telles que la série $\sum v_n$ converge. Justifier l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante telle que :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}\big(\big|X_{\varphi(n)} - X\big| \geqslant u_n\big) \leqslant v_n.$$
   b. En déduire que l'existence d'une sous-suite de (X_n) qui converge presque sûrement vers X.

11 **Convergence en moyenne**

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On dit que (X_n) converge *en moyenne* vers X si, pour tout n assez grand, $|X_n - X|$ admet une espérance et

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(|X_n - X|\big) = 0.$$

1. Montrer que si (X_n) converge en moyenne vers X, alors elle converge en probabilité vers X.

1. Hors-programme, étudié dans l'exercice 28 du chapitre 4 (probabilités générales et discrètes).

2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$. On pose :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad X_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k.$$
   a. Calculer $\mathbb{P}(X_n \neq 0)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
   b. En déduire que (X_n) converge en probabilité vers la variable certaine $X = 0$.
   c. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et en déduire que (X_n) ne converge pas en moyenne.

12 **Une stratégie pour les tests psychotechniques de l'ESSEC ?**

★ On soumet un candidat à un QCM formé d'une suite de questions pour chacune desquelles il peut choisir entre quatre propositions, dont une et une seule est correcte. Chaque réponse correcte est récompensée par 1 point, chaque réponse incorrecte est sanctionnée par une note $b < 0$ de sorte qu'un candidat qui répondrait au hasard à une question ait une espérance de note nulle.

On suppose que pour chaque question, le candidat élimine deux mauvaises propositions mais ne sait pas identifier la bonne entre les deux propositions restantes, parmi lesquelles il choisit donc une réponse au hasard.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des notes obtenues par le candidat lors des n premières questions. La note (éventuellement négative) obtenue à l'épreuve est $Y_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Déterminer un réel p vérifiant la condition :
$$\forall\varepsilon>0,\quad \forall\alpha\in\,]0,1[,\quad \exists N\in\mathbb{N}^*,\quad \forall n\geqslant N,\quad \mathbb{P}\big(Y_n\in[p-\varepsilon, p+\varepsilon]\big)\geqslant 1-\alpha.$$
2. Étant donné un risque $\alpha\in\,]0,1[$ et un seuil $s < p$, déterminer un entier N grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev tel que :
$$\forall n\geqslant N,\quad \mathbb{P}(Y_n\geqslant s)\geqslant 1-\alpha.$$
Calculer N pour $\alpha = 0{,}01$ et $s = 0$ puis $s = \frac{p}{2}$.
3. Affiner le résultat précédent en utilisant le théorème limite central.

13 **Méthode de Monte-Carlo**

On considère une fonction $g : [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(U_k)\qquad\text{et}\qquad I = \int_0^1 g(t)\,dt.$$

1. Que dire de S_n lorsque $n\to\infty$?
2. Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction $g : t\longmapsto\sqrt{1-t^2}$.
   a. Écrire une fonction Scilab qui calcule une valeur approchée de $\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$ en simulant S_n.
   b. Calculer cette intégrale en utilisant le changement de variable $t = \cos x$. Comparer la valeur exacte et la valeur obtenue par simulation avec $n = 1000$.

www.rblld.fr

14 ✎ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$M_n = \max(U_1,\dots,U_n) \quad \text{et} \quad X_n = n(1-M_n).$$

Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

15 ✎ Soient un réel $\theta > 0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une variable aléatoire X_n suivant une loi géométrique de paramètre $p_n = \theta/n$.
Étudier la convergence en loi de la suite de terme général $Y_n = X_n/n$.

16 ★ Soit $(X_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de variables telles que

$$\forall n\geqslant 2,\quad \mathbb{P}\left(X_n=\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n}\quad \mathbb{P}(X_n=n)=\frac{1}{n}.$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité et en loi vers la variable certaine $X=0$ alors que $\mathbb{E}(X_n)$ ne converge pas vers $\mathbb{E}(X)$ lorsque $n\to\infty$.

17

1. Pour $n\in\mathbb{N}$ donné, justifier que la fonction

$$f_n : x\in\mathbb{R}\longmapsto \begin{cases} 1-\cos(2\pi n x) & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

définit une densité de probabilité. Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n.

2. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.
3. Justifier cependant que pour tout $x\in\,]0,1[$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

18 ★ On considère des jetons répartis dans deux boîtes A et B. La boîte A contient initialement deux jetons portant chacun le numéro 0 et la boîte B deux jetons portant le numéro 1.
On répète alors l'expérience suivante : on choisit au hasard et simultanément un jeton a de A et un jeton b de B puis on place le jeton a dans la boîte B et le jeton b dans la boîte A. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note X_n la somme des numéros des jetons contenus dans la boîte A après n échanges.

1. Déterminer les probabilités de transition $p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1}=i)$ pour $i,j\in\{0,1,2\}$ et $n\in\mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera.

19 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n de loi $\mathcal{E}(\frac{1}{n})$ et on pose $Y_n = X_n - \lfloor X_n\rfloor$.

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que Y_n est une variable à densité dont on explicitera une densité.
2. Étudier la convergence en loi de la suite (Y_n).

20 Soit X une variable aléatoire à densité et à valeurs positives. Montrer que la suite de variables aléatoires de terme général $X_n = \frac{\lfloor nX\rfloor}{n}$, $n\geqslant 1$, converge en loi vers X.

21 ♣

1. Soient X et Y deux variables aléatoires, dont on note respectivement F_X et F_Y les fonctions de répartition. On considère un réel $\delta>0$.
   a. Pour $x\in\mathbb{R}$, montrer que :
   $$F_Y(x)\leqslant F_X(x+\delta)+\mathbb{P}\big(|X-Y|>\delta\big)$$
   puis que :
   $$F_Y(x)\geqslant F_X(x-\delta)-\mathbb{P}\big(|X-Y|>\delta\big).$$
   b. En déduire que :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad |F_X(x)-F_Y(x)|\leqslant F_X(x+\delta)-F_X(x-\delta)+\mathbb{P}\big(|X-Y|>\delta\big).$$
2. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. En utilisant l'inégalité établie en **1.b.**, montrer que si (X_n) converge en probabilité vers X, alors (X_n) converge en loi vers X.
3. Montrer que la réciproque est fausse en général, mais que la convergence en loi de (X_n) vers une variable certaine c entraîne la convergence en probabilité de (X_n) vers c.

22 ✎ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n}+1\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire que l'on déterminera.
2. Justifier que la suite $\left(\sqrt{n}(\frac{S_n}{n}-1)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
3. Qu'en déduire concernant la suite $\left(\sqrt{n}(\frac{S_n^2}{n^2}-1)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

23 ✎ On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1.

1. Donner, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire $S_n = X_1+\cdots+X_n$.
2. Montrer, à l'aide du théorème limite central, que
   $$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(S_n\leqslant n)=\frac{1}{2}.$$
3. En déduire l'équivalent :
   $$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\sim\frac{\mathbf{e}^n}{2},\quad n\to\infty.$$

24 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi d'espérance μ et de variance $\sigma^2>0$. On pose $\overline{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$,
   $$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|\geqslant\frac{1}{n^\alpha}\right)=0.$$

www.rblld.fr

2. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0.$$

25 ✎ Un élève fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots. Donner une valeur approchée de la probabilité de faire plus de 5 fautes dans un devoir de 1500 mots. On donne $\mathbf{e}^{-3} \simeq 0{,}05$.

26 ✎ Le nombre de clients pénétrant dans un magasin pendant une journée suit une loi de Poisson de paramètre 12. On admet que le nombre de clients fréquentant le magasin un jour est indépendant de celui des autres jours.
Donner une valeur approchée de la probabilité d'avoir au moins 250 clients durant un mois de 22 jours ouvrables.

27 ✎ Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure. Quel est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit inférieure à $0{,}025$?

Programmation :

- Classe : 2, 6, 7, 11, 9, 15, 16, 18, 19, (24), (12)
- TD : 1, 5, 14, 22, 23, (25), (26), (27)
- TD⋆ : 4, 8, 10, 21

www.rblld.fr