

Travaux dirigés

Espaces euclidiens

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

Exercice 1

Question 1

L'application est :

- linéaire à gauche
- symétrique
- donc linéaire à droite
- définie-positve : pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P, P \rangle = \sum_{j=0}^n P(a_j)^2 \geq 0$$

avec égalité si, et seulement si, $P(a_j) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (par positivité des termes de la somme). Mais alors le polynôme P , de degré inférieur ou égal à n , admet au moins $n + 1$ racines : il est donc nul.

Exercice 1

Question 2.a

Par définition,

$$L_i(a_j) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k}.$$

- Si $i = j$, alors $L_i(a_j) = 1$
- Si $i \neq j$, alors le facteur d'indice $k = j$ est nul, donc $L_i(a_j) = 0$.

En conclusion,

$$L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Exercice 1

Question 2.b

Pour $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^n L_i(a_k) L_j(a_k).$$

- Si $i = j$, seul le terme d'indice $k = i$ n'est pas nul et $\langle L_i, L_j \rangle = 1$
- Si $i \neq j$, tous les termes sont nuls et $\langle L_i, L_j \rangle = 0$.

La famille (L_0, \dots, L_n) est donc orthonormale. Une telle famille est libre et, formée de $n + 1$ vecteurs de l'espace E de dimension $n + 1$, c'est donc une base de E , orthonormale comme on vient de le voir.

Exercice 1

Question 2.c

Comme la base (L_0, \dots, L_n) est orthonormale, les coordonnées d'un vecteur $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base sont données par les produits scalaires

$$\langle L_i, P \rangle = \sum_{j=0}^n L_i(a_j) P(a_j) = P(a_i).$$

On peut donc écrire :

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

Exercice 2

De l'hypothèse $A^2 = A$ on déduit tout d'abord que $f^2 = f$ ou en d'autres termes que f est un projecteur.

Il reste à voir que les sous-espaces $F = \text{Im } f = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker } f$ sont orthogonaux. On considère donc deux vecteurs $x \in F$ et $y \in G$ ainsi que les matrices colonnes X et Y de leurs coordonnées dans la base e . D'après l'expression du produit scalaire en base orthonormale, on a :

$$(x, y) = \langle f(x), y \rangle = {}^t X A Y = {}^t X' A Y = {}^t X A Y = \langle x, f(y) \rangle = 0,$$

d'où le résultat.

Exercice 3

Si Q désigne la matrice de passage de la base e à une base \underline{e} , alors le produit scalaire est représenté dans cette base par la matrice $B = {}^t Q A Q$. En choisissant \underline{e} orthonormale, cette relation s'écrit $I_n = {}^t Q A Q$ c'est-à-dire $A = {}^t P P$ où $P = Q^{-1}$. Un produit de matrices inversibles étant inversible, il en résulte que A est inversible.

Exercice 4

On commence par vérifier que la famille (J, K, L) est libre : pour $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lambda J + \mu K + \nu L = 0 &\iff \begin{pmatrix} \lambda + \mu + \nu & \lambda + \nu & 0 \\ 0 & \lambda + \mu + \nu & \mu + \nu \\ 0 & 0 & \lambda + \mu + \nu \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = \nu = 0. \end{aligned}$$

Ainsi (J, K, L) est libre : c'est donc une base de F qui est par suite de dimension 3.

Exercice 4

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (J, K, L) pour obtenir une base orthogonale (U, V, W) de F . On obtient successivement $U = J$ avec $\|U\| = 2$,

$$V = K - \frac{\langle U, K \rangle}{\|U\|^2} U = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\|V\| = \frac{\sqrt{7}}{2}$ et

$$W = L - \frac{\langle U, L \rangle}{\|U\|^2} U - \frac{\langle V, L \rangle}{\|V\|^2} V = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avec $\|W\| = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 9 / 43

Exercice 4

Il ne reste plus qu'à normaliser les vecteurs précédents pour obtenir une base orthonormale de F :

$$\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 10 / 43

Exercice 5 Q 1.a

Exercice 5

Question 1.a

Pour $f, g \in E$, la fonction fg est continue sur $[0, +\infty[$ avec :

$$\forall t \in [0, +\infty[, |f(t)g(t)| \leq \frac{f(t)^2 + g(t)^2}{2},$$

d'où la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$, par comparaison aux intégrales convergentes $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 11 / 43

Exercice 5 Q 1.b

Exercice 5

Question 1.b

On vérifie que E est un sous-espace de $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$:

- La fonction nulle appartient bien sûr à E .
- Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + g(t))^2 dt = \int_0^{+\infty} (\lambda^2 f(t)^2 + 2\lambda f(t)g(t) + g(t)^2) dt$$

converge par opérations sur les intégrales convergentes d'après la question 1., ainsi $\lambda f + g \in E$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 12 / 43

Exercice 5 Q 2

Exercice 5

Question 2

L'application est bien définie d'après la question 1., bilinéaire par linéarité de l'intégrale et symétrique. De plus, pour $f \in E$,

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \geq 0.$$

Par continuité et positivité de la fonction f^2 , l'égalité $\langle f, f \rangle = 0$ implique $f(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ et f est alors identiquement nulle sur $[0, +\infty[$. Ainsi l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie-positive et constitue donc un produit scalaire.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 13 / 43

Exercice 5 Q 3.a

Exercice 5

Question 3.a

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_k est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, la fonction $t \mapsto f_k(t)^2 = e^{-2kt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et admet pour primitive $t \mapsto -\frac{1}{2k} e^{-2kt}$, qui admet une limite finie en $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f_k(t)^2 dt$ est donc convergente et la fonction f_k appartient à E .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 14 / 43

Exercice 5 Q 3.b

Exercice 5

Question 3.b

Pour $k, l \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle f_k, f_l \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-(k+l)t} dt = \left[-\frac{1}{k+l} e^{-(k+l)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{k+l}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 15 / 43

Exercice 5 Q 4

Exercice 5

Question 4

On applique le procédé de Gram-Schmidt à la famille (f_1, f_2, f_3) pour obtenir une base orthogonale (g_i) de $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. On pose $g_1 = f_1$ avec $\|g_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Puis

$$g_2 = f_2 - \frac{\langle g_1, f_2 \rangle}{\|g_1\|^2} g_1 = f_2 - \frac{2}{3} f_1$$

avec

$$\|g_2\| = \sqrt{\|f_2\|^2 - \frac{4}{3} \langle f_1, f_2 \rangle + \frac{4}{9} \|f_1\|^2} = \frac{1}{6}.$$

Enfin,

$$g_3 = f_3 - \frac{\langle g_1, f_3 \rangle}{\|g_1\|^2} g_1 - \frac{\langle g_2, f_3 \rangle}{\|g_2\|^2} g_2 = f_3 - \frac{6}{5} f_2 + \frac{3}{10} f_1$$

avec

$$\|g_3\| = \frac{1}{10\sqrt{6}}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 16 / 43

Exercice 5 Q 4

On en déduit que les vecteurs

$$\frac{g_1}{\|g_1\|} = \sqrt{2}f_1, \quad \frac{g_2}{\|g_2\|} = 6f_2 - 4f_1 \quad \text{et} \quad \frac{g_3}{\|g_3\|} = \sqrt{6}(10f_3 - 12f_2 + 3f_1)$$

forment une famille orthonormale donc libre de F et même, comme $\dim F \leq 3$, une base orthonormale de F .

Il en résulte en particulier que F est de dimension 3 et donc que sa famille génératrice (f_1, f_2, f_3) est libre, ce qu'il n'a pas été nécessaire de vérifier au préalable. (Si la famille avait été liée, on aurait obtenu un vecteur g_i nul.)

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 17 / 43

Exercice 7 Q 1

Exercice 7

Question 1

- On a tout d'abord $F \subset F + G$ d'où $(F + G)^\perp \subset F^\perp$. De même, $(F + G)^\perp \subset G^\perp$ d'où $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
- Réciproquement si $x \in F^\perp \cap G^\perp$ alors, pour tous $y \in F$ et $z \in G$,

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = 0$$
 si bien que $x \perp F + G$. D'où l'inclusion $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 18 / 43

Exercice 7 Q 2

Exercice 7

Question 2

En appliquant la formule de la question 1. aux sous-espaces F^\perp et G^\perp , on obtient :

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}.$$

En prenant l'orthogonal des deux membres, on en déduit puisque E est euclidien :

$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp.$$

Remarque. En dimension quelconque, on peut montrer l'inclusion $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, mais la réciproque peut être fautive.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 19 / 43

Exercice 8

Exercice 8

- On vérifie dans un premier temps que la somme $F^\perp \oplus G^\perp$ est directe. Soit pour cela un vecteur $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Puisque $E = F \oplus G$, on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Comme $x \in F^\perp$, on a $\langle x, y \rangle = 0$ et de même $\langle x, z \rangle = 0$. Par suite,

$$\langle x, x \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = 0$$
 d'où l'on déduit que $x = 0$.
- On a par ailleurs, en s'appuyant à nouveau sur $E = F \oplus G$,

$$\begin{aligned} \dim F^\perp + \dim G^\perp &= (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G) \\ &= 2 \dim E - (\dim F + \dim G) \\ &= 2 \dim E - \dim E = \dim E. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, les sous-espaces F^\perp et G^\perp sont supplémentaires dans E .

Remarque. Les deux points peuvent s'obtenir comme conséquences directes des formules de l'exercice précédent.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 20 / 43

Exercice 9 Q 1

Exercice 9

Question 1

Pour $x, y \in E$, on a par hypothèse et bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(x + y), x + y \rangle = \langle f(x) + f(y), x \rangle + \langle f(x) + f(y), y \rangle \\ &= \langle f(x), x \rangle + \langle f(y), x \rangle + \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), y \rangle \\ &= \langle f(y), x \rangle + \langle f(x), y \rangle, \end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 21 / 43

Exercice 9 Q 2

Exercice 9

Question 2

- On a tout d'abord $\text{Ker } f \subset (\text{Im } f)^\perp$. En effet, pour $x \in \text{Ker } f$ et $y \in \text{Im } f$, il existe $z \in E$ tel que $y = f(z)$ et alors

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = -\langle f(x), z \rangle = -\langle 0, z \rangle = 0.$$
- Par ailleurs, le théorème du rang assure que :

$$\dim(\text{Im } f)^\perp = \dim E - \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f.$$

On a donc égalité des dimensions dans la première inclusion, qui est donc une égalité : $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } f$.

Remarque. L'inclusion $(\text{Im } f)^\perp \subset \text{Ker } f$ peut être établie à la main : pour $x \in (\text{Im } f)^\perp$, il vient :

$$\forall y \in E, \quad 0 = \langle x, f(y) \rangle = -\langle f(x), y \rangle$$

si bien que le vecteur $f(x)$ est orthogonal à tous les autres : il est donc nul et $x \in \text{Ker } f$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 22 / 43

Exercice 9 Q 3.a

Exercice 9

Question 3.a

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Par hypothèse, les vecteurs x et $f(x) = \lambda x$ sont orthogonaux, ce qui s'écrit $0 = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$. Comme $x \neq 0$ par hypothèse, on a $\langle x, x \rangle \neq 0$ et donc $\lambda = 0$.

Ainsi la seule valeur propre éventuelle de f est 0.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 23 / 43

Exercice 9 Q 3.b

Exercice 9

Question 3.b

Si f est diagonalisable, il est représenté dans une base adaptée par une matrice D diagonale. Les coefficients diagonaux de D étant valeurs propres de f , ils sont tous nuls d'après a.. L'endomorphisme f , représenté par la matrice $D = 0$, est donc nul. La réciproque étant évidente, on peut donc énoncer que f est diagonalisable si, et seulement si, f est l'endomorphisme nul.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 24 / 43

Exercice 9 Q 4

Exercice 9

Question 4

D'après la question 2., les sous-espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires orthogonaux dans l'espace euclidien E :

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

Dans ces conditions, la concaténation d'une BON de $\text{Ker } f$ et d'une BON de $\text{Im } f$ donne une BON de E , dans laquelle f est représenté par une matrice par blocs

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

où $A' \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$ avec $r = \text{rg } f$, car $\text{Im } f$ est stable par f . On peut ajouter que A' est antisymétrique; en effet, la matrice A elle-même est antisymétrique car, représentant l'endomorphisme f en BON, elle a pour coefficient générique

$$a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle = -\langle f(e_i), e_j \rangle = -a_{j,i}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 25 / 43

Exercice 12 Q 1

Exercice 12

Question 1

- Les sous-espaces sont orthogonaux. En effet, pour $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle S, A \rangle = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS)$$
 mais d'autre part :

$$\langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle = \text{tr}(A'S) = -\text{tr}(AS).$$
 On conclut que $\langle A, S \rangle = 0$ en remarquant que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
- La somme $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, orthogonale, est donc directe. Par ailleurs,

$$\dim \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),$$
 donc les sous-espaces $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. On peut justifier directement que les sous-espaces $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(T - \text{id})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(T + \text{id})$ sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ en observant que l'endomorphisme $T : A \mapsto {}^tA$ est une symétrie : $T \circ T = \text{id}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 26 / 43

Exercice 12 Q 2

Exercice 12

Question 2

Pour $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a classiquement :

$$M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}$$

avec

$$\frac{M + {}^tM}{2} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \frac{M - {}^tM}{2} \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{S}_n(\mathbb{R})^\perp.$$

Le projeté orthogonal de M sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est donc donné par :

$$p_{\mathbf{S}_n(\mathbb{R})}(M) = \frac{M + {}^tM}{2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 27 / 43

Exercice 13 Q 1

Exercice 13

Question 1

On peut vérifier le critère de sous-espace ou remarquer que $F = \text{Ker } \phi$ où ϕ est l'application linéaire définie par

$$\phi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(1).$$

Cette deuxième technique a l'avantage de montrer en plus que F est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 28 / 43

Exercice 13 Q 2

Exercice 13

Question 2

On construit tout d'abord une base de F . On peut par exemple considérer les vecteurs $U_1 = X - 1$, $U_2 = X^2 - 1$ et $U_3 = X^3 - 1$. Il s'agit en effet de trois vecteurs de F linéairement indépendants car non nuls et de degrés deux-à-deux distincts, qui forment donc une base de F puisque celui-ci est de dimension 3. On applique ensuite le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale (W_1, W_2, W_3) de F . On pose $W_1 = U_1$ avec $\|W_1\| = \sqrt{2}$, puis

$$W_2 = U_2 - \frac{\langle W_1, U_2 \rangle}{\|W_1\|^2} W_1 = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2},$$

avec $\|W_2\| = \sqrt{3/2}$ et enfin

$$W_3 = U_3 - \frac{\langle W_1, U_3 \rangle}{\|W_1\|^2} W_1 - \frac{\langle W_2, U_3 \rangle}{\|W_2\|^2} W_2 = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$$

avec $\|W_3\| = \sqrt{4/3}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 29 / 43

Exercice 13 Q 2

D'où une base orthonormale de F formée par les trois vecteurs :

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1), \quad V_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right),$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 30 / 43

Exercice 13 Q 3

Exercice 13

Question 3

À partir de la base orthonormale (V_1, V_2, V_3) de F obtenue en 2., on peut calculer le projeté orthogonal de X sur F :

$$p_F(X) = \sum_{i=1}^3 \langle V_i, X \rangle V_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle W_i, X \rangle}{\|W_i\|^2} W_i$$

$$= \frac{1}{2}W_1 - \frac{12}{23}W_2 - \frac{13}{34}W_3$$

$$= -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 31 / 43

Exercice 13 Q 3

On peut aussi utiliser la technique générale de projection orthogonale sur un hyperplan. En effet, en notant $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, la condition d'appartenance à F s'écrit :

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Le sous-espace F est donc l'hyperplan normal à $N = 1 + X + X^2 + X^3$. Par suite, le projeté orthogonal de X sur F est donné par :

$$p_F(X) = X - \frac{\langle N, X \rangle}{\|N\|^2} N = X - \frac{1}{4}N = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 32 / 43

Exercice 14

Exercice 14

Tout d'abord, p est reliée à la projection orthogonale q sur la droite $H^\perp = D$ dont (u) est une base orthonormale par la formule $p = \text{id}_E - q$. La projection q étant, d'après le cours, représentée en base orthonormale \underline{e} par la matrice $U^t U$, la projection p est donc représentée par la matrice $I_n - U^t U$.
Il faut savoir justifier la formule précédente :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = x - q(x) = x - (u, x)u.$$

Si A désigne la matrice représentative de p en base \underline{e} et X la matrice colonne représentative de x en base \underline{e} , cela s'écrit encore, d'après l'expression du produit scalaire en base orthonormale,

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = X - ({}^t U X)U = X - U({}^t U X) = (I_n - U^t U)X.$$

Par unicité de la matrice représentative de p , on a donc $A = I_n - U^t U$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 33 / 43

Exercice 14

Comme la matrice $A = I_n - U^t U$ est donnée dans l'énoncé, on peut procéder différemment.

- Tout d'abord,

$$A^2 = I_n - 2U^t U + U({}^t U U)U = I_n - U^t U = A$$
 car ${}^t U U = \|u\|^2 = 1$ d'après l'expression de la norme en base orthonormale et l'hypothèse u unitaire. L'endomorphisme f de E représenté en base \underline{e} par la matrice A est donc un projecteur. Soient $F = \text{Im } f = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker } f$ les sous-espaces caractéristiques de ce projecteur.
- Par ailleurs,

$$AU = U - U({}^t U U) = U - U = 0$$
 si bien que $u \in \text{Ker } f$ et donc $D = \text{Vect}(u) \subset G$.
 Pour $x \in H$, on a $0 = (u, x) = {}^t U X$ vu l'expression du produit scalaire en base orthonormale, d'où

$$AX = X - U({}^t U X) = X$$
 et donc $f(x) = x$, si bien que $H \subset F$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 34 / 43

Exercice 14

- Les inclusions précédentes donnent les inégalités $n - 1 \leq \dim F$ et $1 \leq \dim G$, qui sont nécessairement des égalités puisque F et G sont supplémentaires. Ainsi les inclusions précédentes sont des égalités et les sous-espaces $F = H$ et $G = H^\perp$ sont donc supplémentaires orthogonaux.

En conclusion, f est la projection orthogonale sur H donc $p = f$ est représenté par la matrice $A = I_n - U^t U$ en base \underline{e} .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 35 / 43

Exercice 15 Q 1

Exercice 15

Question 1

En notant p_F le projecteur orthogonal sur le sous-espace $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, on montre classiquement pour $x \in E$ que :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2 \quad (1)$$

en appliquant le théorème de Pythagore aux vecteurs $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.
Sachant que \underline{u} est une base orthonormale de F , on a par ailleurs :

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle u_k, x \rangle u_k$$

d'où le résultat en utilisant l'expression de la norme en base orthonormale :

$$\sum_{k=1}^n \langle u_k, x \rangle^2 \leq \|x\|^2. \quad (2)$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 36 / 43

Exercice 15 Q 1

On a égalité en (2) si, et seulement si, (1) est une égalité i.e. si, et seulement si, $x - p_F(x) = 0$ c'est-à-dire $x \in F$.
Pour que l'égalité ait lieu pour tout $x \in E$, il faut et il suffit donc que $F = E$ i.e. que \underline{u} soit une base orthonormale de E .

Remarque. On peut également raisonner en complétant la famille orthonormale (u_1, \dots, u_n) en une base orthonormale $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_d)$ de E . On a alors, pour $x \in E$, vu l'expression de la norme et des coordonnées en base orthonormale :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^d \langle u_k, x \rangle^2 \geq \sum_{k=1}^n \langle u_k, x \rangle^2$$

avec égalité si, et seulement si, $\langle u_k, x \rangle = 0$ pour tout $k \in \llbracket n+1, d \rrbracket$ c'est-à-dire $x \in (\text{Vect}(u_{n+1}, \dots, u_d))^\perp = F$. On conclut de même.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 37 / 43

Exercice 15 Q 2.a

Exercice 15

Question 2.a

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par u_1, \dots, u_n . Pour $x \in F^\perp$,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle u_k, x \rangle^2 = 0$$

si bien que $x = 0$. Ainsi $F^\perp = \{0\}$ d'où $F = F^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$ dans l'espace euclidien E . La famille \underline{u} est donc génératrice de E .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 38 / 43

Exercice 15 Q 2.b

Exercice 15

Question 2.b

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En appliquant l'hypothèse au vecteur u_i , il vient :

$$\|u_i\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle u_k, u_i \rangle^2 = \|u_i\|^4 + \sum_{k \neq i} \langle u_k, u_i \rangle^2.$$

Mais partant de $\|u_i\| \geq 1$, il vient $\|u_i\|^2 \leq \|u_i\|^4$, d'où finalement

$$\|u_i\|^2 = \|u_i\|^4 \quad \text{et} \quad \sum_{k \neq i} \langle u_k, u_i \rangle^2 = 0,$$

c'est-à-dire $\|u_i\| = 1$ et, pour tout $k \neq i$, $\langle u_k, u_i \rangle = 0$ par positivité.

La famille (u_1, \dots, u_n) est ainsi orthonormale donc libre. Étant par ailleurs génératrice d'après **a.**, c'est donc une base orthonormale de E .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 39 / 43

Exercice 15 Q 2.c

Exercice 15

Question 2.c

Libre par hypothèse et génératrice d'après **a.**, la famille (u_1, \dots, u_n) est une base de E .
Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donné, le sous-espace engendré par la famille $(u_j)_{j \neq i}$ est donc un hyperplan H_i , dans l'orthogonal duquel on peut trouver un vecteur $x_i \neq 0$. Par hypothèse, on a alors

$$\|x_i\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle u_k, x_i \rangle^2 = \langle u_i, x_i \rangle^2 \leq \|u_i\|^2 \|x_i\|^2$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En divisant par $\|x_i\|^2 > 0$, on en déduit alors que $\|u_i\| \geq 1$, ce qui permet de conclure en appliquant le résultat de la question **b.**

Remarque. Si la famille (u_1, \dots, u_n) n'est pas libre, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(u_j)_{j \neq i}$ soit génératrice de E , et il n'est alors pas possible de trouver un vecteur $x_i \neq 0$ pour raisonner comme ci-dessus. Un contre-exemple évident est donné dans \mathbb{R}^2 euclidien canonique par la famille à deux éléments, tous deux égaux à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 40 / 43

Exercice 16

Exercice 16

Étant donnée une base orthonormale (a) de $D = \text{Im } p$, on a $p(x) = \langle a, x \rangle a$ donc $\|p(x)\|^2 = \langle a, x \rangle^2$ pour tout $x \in E$, si bien que

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle a, e_i \rangle^2 = \|a\|^2 = 1$$

vu l'expression de la norme (et des coordonnées) en base orthonormale.

Remarque. On peut montrer plus généralement que pour tout projecteur orthogonal p ,

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \text{rg } p.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 41 / 43

Exercice 18 Q 1

Exercice 18

Question 1

C'est une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace \mathbb{R}^n euclidien canonique aux vecteurs $x = (1, \dots, 1)$ et $y = (|a_1|, \dots, |a_n|)$:

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 42 / 43

Exercice 18 Q 2

Exercice 18

Question 2

Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Tout vecteur $x \in E$ peut alors se décomposer sous la forme $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et alors

$$p(x) = \sum_{k=1}^n x_k p(e_k)$$

donc, par inégalité triangulaire,

$$\|p(x)\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|p(e_k)\|.$$

Ainsi, en notant $\kappa = \max_{1 \leq k \leq n} \|p(e_k)\|$, on a d'après la question 1. :

$$\|p(x)\| \leq \kappa \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \kappa \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \kappa \sqrt{n} \|x\|$$

vu l'expression de la norme en base orthonormale.

Ainsi, l'ensemble $\left\{ \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \right\}_{x \in E \setminus \{0\}}$ est majoré par $\kappa \sqrt{n}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 43 / 43

Exercice 18 Q 3

Exercice 18

Question 3

Pour $x_0 \in \text{Im } p \setminus \{0\}$ (existe car $p \neq 0$ par hypothèse), on a $p(x_0) = x_0$ donc

$$\|p\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \geq \frac{\|p(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 44 / 43

Exercice 18 Q 4

Exercice 18

Question 4

On suppose le projecteur p orthogonal : c'est donc le projecteur sur $F = \text{Im } p$ parallèlement à F^\perp . Pour $x \in E \setminus \{0\}$, les vecteurs $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$ sont donc orthogonaux, d'où d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2.$$

Par suite,

$$\frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \leq 1$$

et comme cette inégalité est réalisée pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on en déduit que

$$\|p\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \leq 1.$$

On a donc $\|p\| = 1$ d'après la question 3..

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 45 / 43

Exercice 18 Q 5.a

Exercice 18

Question 5.a

On suppose que $\|p\| \leq 1$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\| \quad (*)$$

et il s'agit alors de démontrer que le projecteur p est orthogonal, c'est-à-dire que les sous-espaces $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont orthogonaux. Soient donc $y \in \text{Ker } p$ et $z \in \text{Im } p$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'inégalité (*) appliquée au vecteur $x = \lambda y + z$ s'écrit :

$$\|\lambda y + z\| \leq \|\lambda y + z\|$$

c'est-à-dire, en élevant au carré :

$$\|z\|^2 \leq \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda \langle y, z \rangle + \|z\|^2.$$

On a donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda(\lambda \|y\|^2 + 2 \langle y, z \rangle) \geq 0,$$

ce qui implique $\langle y, z \rangle = 0$, sans quoi on aurait un polynôme du second degré (on peut supposer $y \neq 0$..) qui garde un signe constant alors qu'il présente deux racines distinctes, ce qui est absurde.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 46 / 43

Exercice 18 Q 5.b

Exercice 18

Question 5.b

Pour $x \in E$, on a

$$p(p(x) - x) = p^2(x) - p(x) = 0$$

donc $p(x) - x \in \text{Ker } p$.

Par suite, si $x \in (\text{Ker } p)^\perp$, alors le théorème de Pythagore appliqué aux vecteurs orthogonaux x et $p(x) - x$ donne :

$$\|x + (p(x) - x)\|^2 = \|x\|^2 + \|p(x) - x\|^2$$

d'où l'on déduit, par hypothèse, que

$$\|p(x) - x\|^2 = \|p(x)\|^2 - \|x\|^2 \leq 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 47 / 43

Exercice 18 Q 5.b

Ainsi $x \in (\text{Ker } p)^\perp$ implique $p(x) = x$ c'est-à-dire, puisque p est un projecteur, $x \in \text{Im } p$.

On a ainsi établi l'inclusion $(\text{Ker } p)^\perp \subset \text{Im } p$. Comme on a par ailleurs égalité des dimensions d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker } p)^\perp = \dim E - \dim \text{Ker } p = \dim \text{Im } p,$$

l'inclusion précédente est une égalité : $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p$ d'où $(\text{Im } p)^\perp = (\text{Ker } p)^{\perp\perp} = \text{Ker } p$ ce qui signifie que p est un projecteur orthogonal.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 48 / 43

Exercice 19 Q 1

Exercice 19

Question 1

On justifie facilement que F est un plan dont on détermine une base. Deux vecteurs de F^\perp apparaissent sur les équations : $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, -1, 1, -1)$. En effet, F est défini comme l'intersection des deux hyperplans D_1^\perp et D_2^\perp , où D_1 et D_2 sont les droites engendrées par u_1 et u_2 . Donc $D_1 = D_1^{\perp\perp} \subset F^\perp$ et de même $D_2 \subset F^\perp$. Plus précisément,

$$F^\perp = (D_1^\perp \cap D_2^\perp)^\perp = D_1^{\perp\perp} + D_2^{\perp\perp} = D_1 + D_2,$$

ce qu'on peut retrouver par un argument dimensionnel :

$$\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F = 2.$$

Ainsi (u_1, u_2) est une base de F^\perp . Les deux vecteurs u_1 et u_2 étant déjà orthogonaux, on en déduit directement une base orthonormale de F^\perp :

$$\left(v_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), v_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \right).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 49 / 63

Exercice 19 Q 2

Exercice 19

Question 2

Puisque (v_1, v_2) est une base orthonormale de F^\perp , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, p_{F^\perp}(x) = (v_1, x)v_1 + (v_2, x)v_2.$$

Comme les projections orthogonales sur F et sur F^\perp sont liées par $p_F + p_{F^\perp} = \text{id}$, on en déduit la matrice représentative de p_F en base canonique :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La symétrie orthogonale par rapport à F est quant à elle donnée par $s_F = 2p_F - \text{id}$, d'où sa matrice représentative en base canonique :

$$2A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 50 / 63

Exercice 19 Q 3

Exercice 19

Question 3

Pour $x = (1, 2, 3, 4)$, on obtient $p_F(x) = (-1, -1, 1, 1)$ d'où

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{26}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 51 / 63

Exercice 20 Q 1

Exercice 20

Question 1

La fonction $f : t \mapsto A(t)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Si $A \neq 0$ est de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$, alors $A(t) \sim a_n t^n$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. On a donc :

$$f(t) \sim a_n t^n e^{-t}, \quad t \rightarrow +\infty$$

ce qui permet de conclure selon l'une des méthodes suivantes :

- on a $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ d'où la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$;
- on a $f(t) \sim a_n t^n e^{-t} = a_n t^n e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$, $t \rightarrow +\infty$, d'où la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ convergente pour $\alpha > 0$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 52 / 63

Exercice 20 Q 2

Exercice 20

Question 2

L'application est bien définie d'après la question 1., bilinéaire par linéarité de l'intégrale et symétrique. De plus, pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt \geq 0.$$

Par continuité et positivité de la fonction $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$, l'égalité $\langle P, P \rangle = 0$ implique $P(t)^2 e^{-t} = 0$ donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. Le polynôme P , qui présente alors une infinité de racines, est nécessairement nul. Ainsi l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie-positif et constitue donc un produit scalaire.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 53 / 63

Exercice 20 Q 3.a

Exercice 20

Question 3.a

Pour $0 \leq i, j \leq 2$, on a :

$$\langle X^i, X^j \rangle = \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} dt = \Gamma(i+j+1) = (i+j)!.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 54 / 63

Exercice 20 Q 3.b

Exercice 20

Question 3.b

Le projeté orthogonal Π de X^2 sur le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_1[X]$ est caractérisé par les conditions :

$$\begin{cases} \Pi \in \mathbb{R}_1[X] \\ X^2 - \Pi \perp \mathbb{R}_1[X] \end{cases}.$$

La première condition exprime l'existence de deux réels a_0 et b_0 tels que $\Pi = a_0 X + b_0$ et la seconde s'écrit alors

$$\begin{cases} X^2 - \Pi \perp 1 \\ X^2 - \Pi \perp X \end{cases} \iff \begin{cases} \langle X^2 - a_0 X - b_0, 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - a_0 X - b_0, X \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 \langle X, 1 \rangle + b_0 \langle 1, 1 \rangle = \langle X^2, 1 \rangle \\ a_0 \langle X, X \rangle + b_0 \langle 1, X \rangle = \langle X^2, X \rangle \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 + b_0 = 2 \\ 2a_0 + b_0 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 4 \\ b_0 = -2 \end{cases}.$$

Le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est donc $\Pi = 4X - 2$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 55 / 63

Exercice 20 Q 4

Exercice 20

Question 4

Par théorème,

$$\begin{aligned} d &= \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \|X^2 - (aX + b)\|^2 \\ &= \inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|^2 = \|X^2 - \Pi\|^2 = \|X^2 - 4X + 2\|^2 = 4. \end{aligned}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 56 / 63

Exercice 21

On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique

$$(B, C) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \langle B, C \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{i,j} c_{i,j},$$

pour lequel :

$$\forall B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|B\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{i,j}^2}.$$

On a alors, sous réserve d'existence,

$$\inf_{M \in H} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = \inf_{M \in H} \|A - M\|^2$$

où H est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ comme noyau de la forme linéaire non nulle

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j},$$

ou comme orthogonal de la droite D dirigée par la matrice $\mathbb{1}$, dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On a alors par théorème l'existence et la valeur de :

$$\begin{aligned} \delta &= \inf_{M \in H} \|A - M\|^2 = d(A, H)^2 = \|A - \rho_H(A)\|^2 = \|\rho_D(A)\|^2 \\ &= \left\| \left\langle \frac{\mathbb{1}}{\|\mathbb{1}\|}, A \right\rangle \frac{\mathbb{1}}{\|\mathbb{1}\|} \right\|^2 = \frac{\langle \mathbb{1}, A \rangle^2}{\|\mathbb{1}\|^2} = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right)^2. \end{aligned}$$

Exercice 22

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) = (2x - y - 1)^2 + (x + 3)^2 + (x - y - 1)^2 = \|AX - B\|^2$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Comme A est de rang 2, égal à son nombre de colonnes, la fonction f admet donc par théorème un minimum sur \mathbb{R}^2 , atteint en un unique point donné par la pseudo-solution X_0 du système linéaire $AX = B$. Celle-ci correspond à l'unique solution du système de Cramer ${}^tAA X = {}^tAB$. Les calculs donnent

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La résolution du système linéaire

$${}^tAA X = {}^tAB \iff \begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ -3x + 2y = -2 \end{cases}$$

conduit alors au point $(x_0, y_0) = (-2, -4)$ en lequel f présente un minimum, égal à 3.

Exercice 23

Question 1

Pour $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\delta(m, p) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - p)^2 = \|AX - B\|^2$$

où

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,2}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme la matrice A est de rang 2 (car les x_i , $1 \leq i \leq n$, ne sont pas tous égaux), égal à son nombre de colonnes, il existe par théorème un unique couple (m, p) minimisant la quantité $\delta(m, p)$, qui correspond à l'unique pseudo-solution du système $AX = B$.

Exercice 23

Question 2

La droite de régression de y en x du nuage de points donné est la droite d'équation $y = mx + p$ où (m, p) est l'unique solution du système linéaire ${}^tAA X = {}^tAB$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}.$$

Le calcul donne

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le système s'écrit donc

$$\begin{cases} 6m + 2p = 8 \\ 2m + 4p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ p = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

La droite de régression de y en x a donc pour équation $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

