Fonctions de plusieurs variables : continuité

Feuille d'exercices

1 On considère une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie Ω convexe de $\mathbb{R}^n$.
On dit que f est convexe sur Ω si :

$$\forall (x,y) \in \Omega^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

1. Montrer que les fonctions $x \longmapsto \|x\|^2$ et $x \longmapsto \mathbf{e}^{\|x\|^2}$ sont convexes sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(u,v) = u^2 + v^2 - uv.$$
   a. Montrer que pour tous $(u,v), (u',v') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$f\big(\lambda(u,v) + (1-\lambda)(u',v')\big) = \lambda f(u,v) + (1-\lambda) f(u',v') - \lambda(1-\lambda) f(u-u', v-v').$$
   b. En déduire que f est convexe.
3. Montrer que f est convexe si, et seulement si, le graphe de f est une partie convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2 On considère un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^n$. Que dire du sous-espace vectoriel de E engendré par U ?

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xy\mathbf{e}^{-x-y}.$$

Pour tout réel λ, on note Γ_λ la ligne de niveau λ de f, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = \lambda$.

1. On considère la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto x\mathbf{e}^{-x}$.
   a. Étudier les variations de φ. Discuter selon les valeurs de λ le nombre de solutions de l'équation $\varphi(x) = \lambda$.
   b. Montrer que la restriction ψ de φ à $]-\infty, 0[$ définit une bijection de $]-\infty, 0[$ sur lui-même. Montrer que la bijection réciproque ψ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$.

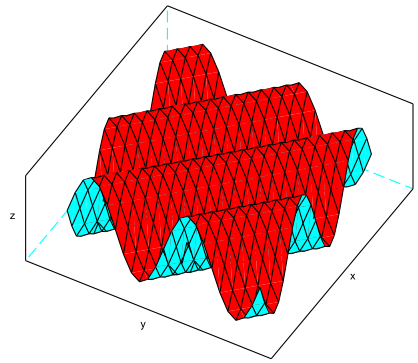
Pour tout $\lambda \neq 0$, on note Γ_λ^+ (resp. Γ_λ^-) l'intersection de Γ_λ et du demi-plan $x > 0$ (resp. $x < 0$).

2. Soit $\lambda > 0$.
   a. Montrer que Γ_λ^+ est non vide si, et seulement si, $\lambda \leqslant \mathbf{e}^{-2}$. Montrer qu'alors Γ_λ^+ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.
   b. Établir que Γ_λ^- peut être caractérisée par une équation de la forme $y = g_\lambda(x)$ où g_λ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ qu'on exprimera en fonction de φ et ψ^{-1}. Préciser les variations de g_λ et ses limites en $-\infty$ et 0.
3. On note (X, Y) les coordonnées de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $\big((1,1), (-1,1)\big)$.
   a. Pour tout réel λ, caractériser Γ_λ par une équation de la forme $F(X,Y) = \lambda$.
   b. On suppose $\lambda < 0$. Montrer que Γ_λ^- peut être caractérisée par une équation de la forme $Y = G_\lambda(X)$ où G_λ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont on précisera les variations et les branches infinies à l'aide de φ. Comment obtient-on Γ_λ^+ ?
   c. On suppose $0 < \lambda \leqslant \mathbf{e}^{-2}$. Caractériser Γ_λ^+ par une équation de la forme $Y = \pm G_\lambda(X)$, où G_λ est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}_+$ dont on étudiera les variations à l'aide de φ.
4. Indiquer sur un dessin l'allure des diverses lignes de niveau de la fonction f.

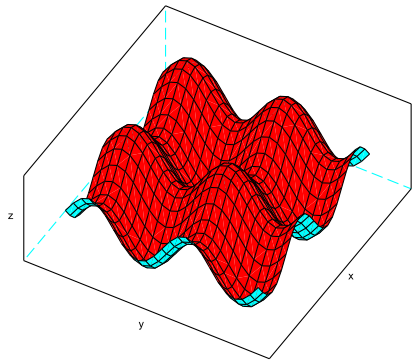
4 ✎ Associer chacune des fonctions ci-dessous :

$$f_1 : (x,y) \longmapsto \sin x, \quad f_2 : (x,y) \longmapsto \sin y,$$
$$f_3 : (x,y) \longmapsto \sin(x+y), \quad f_4 : (x,y) \longmapsto \sin x + \sin y$$

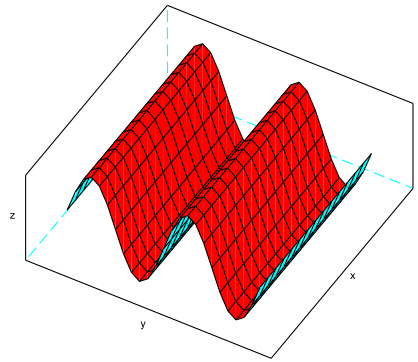
à son graphe :



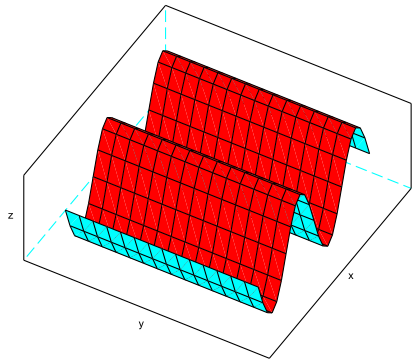
(a)



(b)



(c)

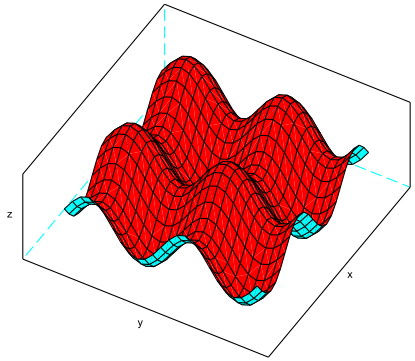


(d)

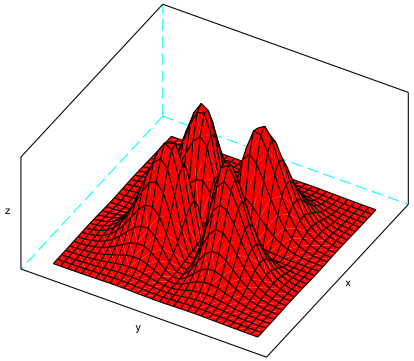
5 ✎ Représenter grâce à Scilab le graphe de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sin\sqrt{x^2+y^2}$.
Quelle propriété observe-t-on ? Comment justifier cette propriété ?

✎ : application ♣ : difficile ★ : classique

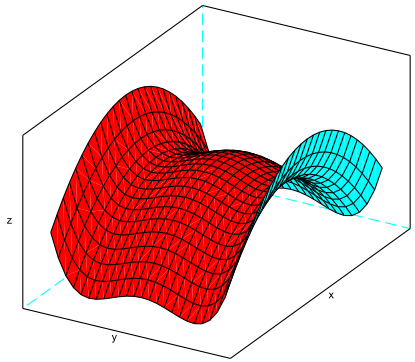
6 Associer chacun des graphes ci-dessous :



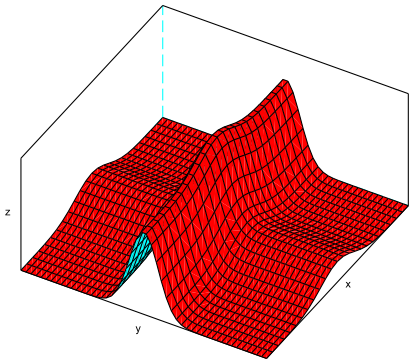
(a)



(b)

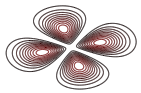


(c)

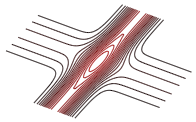


(d)

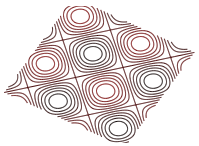
à ses lignes de niveau :



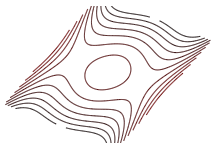
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

7 Étudier l'existence d'une limite à l'origine pour les applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

1. $(x,y) \longmapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

2. $(x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}\sin(x+y)$;

3. $(x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

4. $(x,y) \longmapsto \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$.

8 Étudier la continuité des applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

1. $(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. $(x,y) \longmapsto \begin{cases} y\mathbf{e}^{\arctan(x/y)} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$;

3. $(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$;

4. $(x,y) \longmapsto \begin{cases} x\ln y & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$.

9 Soient $\mathbb{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ et $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Justifier qu'il existe $\mathrm{M}_0 \in \mathbb{T}$ tel que $f(\mathrm{M}_0) = f(-\mathrm{M}_0)$.
Indication. On pourra introduire l'application

$$g : t \in [0, 2\pi] \longmapsto f(\cos t, \sin t) - f(-\cos t, -\sin t).$$

10 Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que si f est injective, alors f est strictement monotone.
Indication. On pourra montrer que la fonction

$$\varphi : (x,y) \longmapsto f(y) - f(x)$$

garde un signe constant sur $\Delta = \{(x,y) \in \mathrm{I}^2 : x < y\}$.

11 Trouver des contre-exemples pour mettre en évidence que l'image par une application continue d'une partie ouverte (resp. fermée, resp. bornée) n'est pas toujours ouverte (resp. fermée, resp. bornée).

12 ★ Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

1. a. Montrer l'existence d'un réel κ tel que :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(\mathrm{X})\| \leqslant \kappa \|\mathrm{X}\|.$$

b. En déduire que l'application $\varphi : \mathrm{X} \longmapsto \|f(\mathrm{X})\|$ est continue.

2. Justifier que $\operatorname{Ker} f$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

3. En déduire plus généralement que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est fermé.

13 Soit $\mathcal{K}$ une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^n$. On considère une application $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ telle que :

$$\forall (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathcal{K}^2, \qquad \mathrm{X} \neq \mathrm{Y} \quad \Longrightarrow \quad \|f(\mathrm{Y}) - f(\mathrm{X})\| < \|\mathrm{Y} - \mathrm{X}\|.$$

1. Justifier que l'application $\varphi : \mathrm{X} \in \mathcal{K} \longmapsto \|f(\mathrm{X}) - \mathrm{X}\|$ est continue.

2. En déduire que f admet un unique point fixe, i.e. qu'il existe un unique $\mathrm{A} \in \mathcal{K}$ tel que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$.

14 Soient $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier, pour tout $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, l'existence de

$$f(a) = \sup_{t\in[0,1]} \left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right|.$$

2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie.

a. Justifier successivement que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$f(a) \leqslant f(b) + \sqrt{n+1}\,\|b-a\| \quad \text{puis} \quad |f(b) - f(a)| \leqslant \sqrt{n+1}\,\|b-a\|\,.$$

b. En déduire que f est continue.

3. On définit la fonction $g : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad g(a) = \sup_{t\in[0,1]} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right|.$$

a. Justifier que g est continue.

b. Montrer que $g(a) > 0$ pour tout $a \neq 0$. Justifier l'existence de la borne inférieure ci-dessous ainsi que l'inégalité :

$$\mu = \inf_{\|a\|=1} g(a) > 0.$$

c. Justifier que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad f(a) \geqslant g(a) - \mathrm{K} \geqslant \mu\,\|a\| - \mathrm{K}$$

où $\mathrm{K} = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$ et en déduire que $f(a)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|a\| \to +\infty$.

4. Déduire de ce qui précède que f admet un minimum. On appelle *polynôme de meilleure approximation* de φ tout polynôme $\mathrm{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ pour lequel le point $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ réalise le minimum de f.

Programmation :

- Classe : 4, 6
- TD* : 7, 8, 10, 12