

**Travaux dirigés**  
Fonctions de plusieurs variables : continuité

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      1 / 1

Exercice 2

Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par  $U$ . Puisque  $U$  est non vide, il existe  $A \in U$  et comme  $U$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(A, r) \subset U \subset F$ . On conjecture que  $F = \mathbb{R}^n$ .

**Cas particulier** où  $A = 0$ .  
Pour  $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et  $Y = \frac{r}{2\|X\|}X$ , on a

$$\|Y\| = \frac{r}{2\|X\|} \|X\| = \frac{r}{2} < r$$

donc  $Y \in B(0, r) \subset F$ . Par suite,  $X = \frac{2\|X\|}{r}Y$  appartient au sous-espace vectoriel  $F$  et l'on a donc justifié que  $F = \mathbb{R}^n$  (puisque bien sûr  $0 \in F$ ).

**Cas général.** On cherche à se ramener au cas précédent en montrant qu'on peut supposer  $A = 0$ .  
On montre pour cela l'inclusion  $B(0, r) \subset F$ . Soit donc  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|X\| < r$ .  
On a  $Y = A + X \in B(A, r) \subset F$  donc, puisque  $F$  est un sous-espace vectoriel,  $X = (A + X) - A \in F$ .

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      2 / 1

Exercice 7      Q 1

**Exercice 7**  
Question 1

On a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  :

$$|f(x, y)| = \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{\|(x, y)\|^2}$$

$$\leq \frac{2\|(x, y)\|^3}{\|(x, y)\|^2} = 2\|(x, y)\| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      3 / 1

Exercice 7      Q 2

**Exercice 7**  
Question 2

On a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  :

$$|f(x, y)| = \frac{|xy|}{x^2 + y^2} |\sin(x + y)| = \frac{|x| |y|}{\|(x, y)\|^2} |\sin(x + y)|$$

$$\leq \frac{\|(x, y)\|^2}{\|(x, y)\|^2} |\sin(x + y)| = |\sin(x + y)| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      4 / 1

Exercice 7      Q 3

**Exercice 7**  
Question 3

On observe que  $f$  n'admet pas la même limite en  $(0, 0)$  le long de deux chemins :

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0) \quad \text{et} \quad f(\gamma_1(t)) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

alors que

$$\gamma_2(t) = (t, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0) \quad \text{et} \quad f(\gamma_2(t)) = \frac{t^2}{2t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2},$$

ce qui exclut l'existence d'une limite finie pour  $f$  en  $(0, 0)$ .

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      5 / 1

Exercice 7      Q 3

On montre de même que

$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ . En effet, elle n'admet pas la même limite en  $(0, 0)$  le long de deux chemins :

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0) \quad \text{et} \quad g(\gamma_1(t)) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

alors que

$$\gamma_3(t) = (0, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0) \quad \text{et} \quad g(\gamma_3(t)) = \frac{t^2}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1.$$

On observe néanmoins sur cet exemple que les limites ci-dessous existent mais sont distinctes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) \right) \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y) \right).$$

On retiendra que  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  ne revient pas à  $x \rightarrow x_0$  puis  $y \rightarrow y_0$  (ou l'inverse), mais à  $x \rightarrow x_0$  **et**  $y \rightarrow y_0$  **simultanément**.

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      6 / 1

Exercice 7      Q 4

**Exercice 7**  
Question 4

**Première méthode**  
On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = \frac{x(\sin y - y) - y(\sin x - x)}{x^2 + y^2}.$$

Puis l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t - t| \leq \frac{t^2}{2}.$$

Par suite,

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x| |\sin y - y| + |y| |\sin x - x|}{\|(x, y)\|^2} \leq \frac{|x|y^2 + |y|x^2}{2\|(x, y)\|^2} \leq \|(x, y)\|$$

avec un majorant qui tend vers 0 lorsque  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , d'où :

$$f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      7 / 1

Exercice 7      Q 4

**Deuxième méthode**  
Le développement limité du sinus en 0 à l'ordre 1 s'écrit

$$\sin t = t + t\varepsilon(t) \quad \text{où} \quad \varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Par suite, pour  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$f(x, y) = \frac{x(y + y\varepsilon(y)) - y(x + x\varepsilon(x))}{x^2 + y^2} = \frac{xy\varepsilon(y) - xy\varepsilon(x)}{x^2 + y^2}$$

d'où

$$|f(x, y)| \leq \frac{|xy|}{x^2 + y^2} (|\varepsilon(x)| + |\varepsilon(y)|) \leq \frac{1}{2} (|\varepsilon(x)| + |\varepsilon(y)|) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

par composition des limites<sup>1</sup>.  
Il en résulte que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

1. Mieux vaudrait dire, pour respecter le programme, par composition des fonctions continues après avoir posé  $\varepsilon(0) = 0$  pour rendre  $\varepsilon$  continue en 0.

www.rbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      8 / 1

Exercice 8 Q 1

### Exercice 8

Question 1

La fonction  $f$  est tout d'abord continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  par opérations sur les fonctions continues.  
Par ailleurs, on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  :

$$|f(x, y)| = |x| \frac{|y|}{|x| + |y|} \leq |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

d'où

$$f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \neq (0,0)]{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0,0)$$

et  $f$  est continue en  $(0,0)$ .  
En conclusion,  $f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 9 / 1

Exercice 8 Q 2

### Exercice 8

Question 2

Tout d'abord, la fonction  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  par opérations sur les fonctions continues.  
Il reste à étudier la continuité de  $f$  en un point de la forme  $(x_0, 0)$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  
Or, pour tout  $y \neq 0$ ,

$$|f(x, y)| = \left| y e^{\arctan(x/y)} \right| \leq |y| e^{\pi/2}$$

d'où, l'inégalité étant immédiate lorsque  $y = 0$  :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x, y)| \leq |y| e^{\pi/2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} 0,$$

si bien que

$$f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (x_0,0)]{} 0 = f(x_0, 0),$$

d'où l'on déduit que  $f$  est continue au point  $(x_0, 0)$ .  
En conclusion,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 10 / 1

Exercice 8 Q 3

### Exercice 8

Question 3

**Méthode 1**

Les théorèmes opératoires assurent la continuité de  $f$  en tout point  $(x_0, y_0)$  tel que  $y_0 \neq 0$ .  
L'équivalent classique du  $\ln$  conduit à conjecturer que  $f$  est également continue en un point de la forme  $(x_0, 0)$ . Pour le démontrer, on utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange qui donne

$$\forall u > 0, \quad |\ln(1+u) - u| \leq \frac{u^2}{2}.$$

Par suite, si  $y \neq 0$ ,

$$|f(x, y) - x_0^2| = \left| \frac{\ln(1+x^2y^2) - x^2y^2}{y^2} + x^2 - x_0^2 \right|$$

$$\leq \frac{|\ln(1+x^2y^2) - x^2y^2|}{y^2} + |x^2 - x_0^2| \leq \frac{x^4y^2}{2} + |x^2 - x_0^2|$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 11 / 1

Exercice 8 Q 3

L'inégalité entre les membres extrêmes étant encore valable pour  $y = 0$ , on a donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x, y) - x_0^2| \leq \frac{x^4y^2}{2} + |x^2 - x_0^2| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} 0,$$

d'où l'on déduit que

$$f(x, y) \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (x_0,0)]{} x_0^2 = f(x_0, 0)$$

et  $f$  est continue en  $(x_0, 0)$ . La fonction  $f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 12 / 1

Exercice 8 Q 3

**Méthode 2**

On observe que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 \varphi(xy)$$

où

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Comme  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  par opérations sur les fonctions continues.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 13 / 1

Exercice 8 Q 4

### Exercice 8

Question 4

Tout d'abord, la fonction  $f$  est continue en tout point de la forme  $(x_0, y_0)$  avec  $y_0 \neq 0$ , c'est-à-dire sur l'ouvert  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ , par opérations sur les fonctions continues. En effet, au voisinage de chacun de ces points, elle a une expression unique de la forme  $(x, y) \mapsto x \ln y$  si  $y_0 > 0$  et  $(x, y) \mapsto 0$  si  $y_0 < 0$ .  
Pour  $x_0 \neq 0$  et  $y_0 = 0$ , on a

$$f(x, y) = x \ln y \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (x_0,0)]{y > 0} \pm \infty$$

selon le signe de  $x_0$ . La fonction  $f$  n'admet donc pas de limite au point  $(x_0, 0)$  et n'est donc pas continue en ce point.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 14 / 1

Exercice 8 Q 4

Concernant le comportement de  $f$  au voisinage de  $(0,0)$ , on observe qu'elle n'y présente pas la même limite le long de deux chemins :

$$\gamma_1(t) = (t, t) \xrightarrow[t > 0]{t \rightarrow 0} (0,0) \quad \text{et} \quad f(\gamma_1(t)) = t \ln t \xrightarrow[t > 0]{t \rightarrow 0} 0$$

alors que

$$\gamma_2(t) = (t, e^{-1/t}) \xrightarrow[t > 0]{t \rightarrow 0} (0,0) \quad \text{et} \quad f(\gamma_2(t)) = t \ln e^{-1/t} = -1 \xrightarrow[t > 0]{t \rightarrow 0} -1,$$

ce qui exclut l'existence d'une limite finie pour  $f$  en  $(0,0)$ . Par suite  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 15 / 1

Exercice 9

### Exercice 9

La fonction

$$g : t \in [0, 2\pi] \mapsto f(\cos t, \sin t) - f(-\cos t, -\sin t)$$

est continue comme composée de fonctions continues.  
Par ailleurs les réels  $g(0)$  et  $g(\pi)$  sont opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction  $g$  s'annule en un point  $t_0 \in [0, 2\pi]$ , ce qui signifie que  $f(M_0) = f(-M_0)$  où  $M_0 = (\cos t_0, \sin t_0) \in \mathbb{T}$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 16 / 1

Exercice 10

### Exercice 10

Il s'agit de montrer que la fonction

$$\varphi : (x, y) \mapsto f(y) - f(x),$$

qui ne s'annule pas sur  $\Delta = \{(x, y) \in I^2 : x < y\}$  car  $f$  est injective,  $y$  garde un signe constant. Or, si  $M_0 = (x_0, y_0)$  et  $M = (x, y)$  sont deux éléments distincts de  $\Delta$ , la fonction d'une variable réelle

$$g : t \in [0, 1] \mapsto \varphi((1-t)M_0 + tM),$$

bien définie car  $\Delta$  est convexe, est continue par opérations sur les fonctions continues. Comme  $\varphi$ , la fonction  $g$  ne s'annule pas donc garde un signe constant sur l'intervalle  $[0, 1]$  en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi  $\varphi(M_0) = g(0)$  est de même signe que  $\varphi(M) = g(1)$ . On a bien démontré que  $\varphi$  garde un signe constant sur  $\Delta$  : celui de  $\varphi(M_0)$ , d'où le résultat.

www.rhfd.fr    Travaux dirigés    Année 2019/2020    17 / 1

Exercice 12    Q 1.a

### Exercice 12

Question 1.a

Soit  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\begin{aligned} \|f(X)\| &= \left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i E_i\right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(E_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|f(E_i)\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|f(E_i)\|\right) \|X\| = \kappa \|X\| \end{aligned}$$

où

$$\kappa = \sum_{i=1}^n \|f(E_i)\|.$$

www.rhfd.fr    Travaux dirigés    Année 2019/2020    18 / 1

Exercice 12    Q 1.b

### Exercice 12

Question 1.b

Soit  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Pour  $X \in \mathbb{R}^n$ , on a d'après l'inégalité triangulaire à gauche et la question a. :

$$\begin{aligned} |\varphi(X) - \varphi(A)| &= \left| \|f(X)\| - \|f(A)\| \right| \leq \|f(X) - f(A)\| \\ &= \|f(X - A)\| \leq \kappa \|X - A\| \xrightarrow{X \rightarrow A} 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que  $\varphi(X)$  tend vers  $\varphi(A)$  lorsque  $X \rightarrow A$  et la fonction  $\varphi$  est donc continue en tout point  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ .

www.rhfd.fr    Travaux dirigés    Année 2019/2020    19 / 1

Exercice 12    Q 2

### Exercice 12

Question 2

L'ensemble  $\text{Ker } f = \varphi^{-1}(\{0\})$  est fermé comme image réciproque du fermé  $\{0\}$  par l'application  $\varphi$ , continue d'après la question 1.b..

www.rhfd.fr    Travaux dirigés    Année 2019/2020    20 / 1

Exercice 12    Q 3

### Exercice 12

Question 3

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et si  $G$  en désigne un supplémentaire dans  $\mathbb{R}^n$ , alors  $F$  peut s'écrire comme le noyau de la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ . A ce titre, c'est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$  d'après 2..

www.rhfd.fr    Travaux dirigés    Année 2019/2020    21 / 1

Exercice 13    Q 1

### Exercice 13

Question 1

On peut noter pour commencer que :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{K}^2, \quad \|f(Y) - f(X)\| \leq \|Y - X\|.$$

On considère la fonction

$$\varphi : X \in \mathcal{K} \mapsto \|f(X) - X\|.$$

Pour  $A \in \mathcal{K}$ , on a par inégalité triangulaire à l'envers, pour tout  $X \in \mathcal{K}$  :

$$\begin{aligned} |\varphi(X) - \varphi(A)| &= \left| \|f(X) - X\| - \|f(A) - A\| \right| \leq \left| (f(X) - X) - (f(A) - A) \right| \\ &= \left\| (f(X) - f(A)) - (X - A) \right\| \leq \|f(X) - f(A)\| + \|X - A\| \\ &\leq 2 \|X - X_0\| \xrightarrow{X \rightarrow X_0} 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\varphi(X)$  tend vers  $\varphi(A)$  lorsque  $X \rightarrow A$  et  $\varphi$  est donc continue en tout point  $A$  de  $\mathcal{K}$ .

www.rhfd.fr    Travaux dirigés    Année 2019/2020    22 / 1

Exercice 13    Q 2

### Exercice 13

Question 2

**Unicité**

Si  $A$  et  $B$  sont deux points fixes distincts, alors

$$\|A - B\| = \|f(A) - f(B)\| < \|A - B\|,$$

ce qui est absurde.

**Existence**

La fonction  $\varphi$ , continue sur  $\mathcal{K}$ , fermé, borné et non vide, y atteint un minimum en un point  $A$ . Un tel point  $A$  est nécessairement point fixe de  $f$ . En effet, si  $B = f(A)$  est distinct de  $A$ , alors par hypothèse

$$\varphi(B) = \|f(B) - B\| = \|f(B) - f(A)\| < \|B - A\| = \varphi(A),$$

en contradiction avec la définition de  $A$ .

www.rhfd.fr    Travaux dirigés    Année 2019/2020    23 / 1