Produits scalaires et orthogonalité

Feuille d'exercices

1 ✎ **1.** Justifier que l'application

$$\varphi : \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \longmapsto 4x_1x_2 - x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$, préciser si elle est symétrique, positive, définie-positive puis déterminer sa matrice en base canonique et, en proposant deux méthodes, dans la base formée par les vecteurs $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, 2)$.

2. Même question dans $\mathbb{R}^3$ avec l'application

$$\psi : \big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) \longmapsto \begin{array}{l} x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 5y_1y_2 \\ \qquad +2y_1z_2 + 2y_2z_1 + z_1z_2 \end{array}$$

et les vecteurs $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (2, 0, 1)$ et $e_3 = (3, 0, 1)$.

2 Soit φ la forme bilinéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Justifier que $X \longmapsto \sqrt{\varphi(X, X)}$ définit une norme euclidienne sur $\mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

3 ✎ Pour $n \geqslant 2$ donné, on considère l'ensemble E des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 0$. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall P, Q \in E, \qquad \varphi(P, Q) = -\int_0^1 P(x)Q''(x)\,dx.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E. Expliciter la norme euclidienne associée.

4 Soient E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f : E \longrightarrow E$ une application.

1. Montrer que si

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \big\langle f(x), f(y) \big\rangle = \langle x, y \rangle,$$

alors f est un endomorphisme de E.

2. En déduire que si

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|,$$

alors f est un endomorphisme affine de E : il existe $y_0 \in E$ et $\varphi \in \mathbf{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = y_0 + \varphi(x)$.

5 Soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Montrer que :

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^2 \leqslant \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

2. Montrer plus généralement que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad n \leqslant \sum_{i=1}^n \sqrt[2^k]{i} \leqslant n \cdot \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}.$$

6 ✎ Montrer que si $x, y, z \in \mathbb{R}$ sont tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$, alors $(x + y + z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$.

7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, déterminer les n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ de réels tels que

$$x_1 + \cdots + x_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = n.$$

8 ✎ Montrer que :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \qquad |\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$$

et étudier le cas d'égalité.

9 ✎ Montrer que pour toute fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on a :

$$\left|\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt\right| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2}\,dt}$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2}\,dt\right| \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}\sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2}\,dt}.$$

Étudier les cas d'égalité.

10 Soient $a < b$ réels et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que :

$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x)^2 \leqslant \left(\int_a^x |f'(t)|\,dt\right)^2$$

et en déduire que :

$$\int_a^b f(t)^2\,dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'(t)^2\,dt.$$

11 Soient $f, g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t)g(t) \geqslant 1$. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right) \geqslant 1.$$

12 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance. Montrer que :
$$\frac{1}{\mathbb{E}(X)} \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right).$$

13 Pour $\alpha > 0$ donné, on considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient générique
$$a_{i,j} = \frac{\mathbf{e}^{(i+j)\alpha} - 1}{i+j}, \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

1. Montrer que :
$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX = \alpha \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{e}^{k\alpha t} x_k\right)^2 \mathrm{d}t$$
et en déduire que la matrice A est symétrique définie positive.
2. En utilisant la formule précédente, montrer que :
$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \leqslant \frac{\mathbf{e}^{2n\alpha} - 1}{2}\,{}^tXX.$$

14 ★ Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
Montrer que pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXA^2X \leqslant 0$ et en déduire que les valeurs propres de A^2 sont négatives ou nulles.

15 ★ Soit $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$ et en déduire que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tAA$.

16 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On considère une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs unitaires de E telle que $\|e_i - e_j\| = 1$ pour tous $i \neq j$.
Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

17 On munit $E = \mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur unitaire.

1. Montrer que $f : x \in E \longmapsto x + a\langle u, x\rangle u$ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de f et décider si cet endomorphisme est diagonalisable.

18 ✎ Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère les vecteurs
$$e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \qquad e_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1) \qquad e_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1).$$

1. Démontrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est orthonormale.
2. Déterminer les vecteurs e_4 tels que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.

19 ✎ Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire canonique, déterminer une base orthogonale de l'orthogonal du sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(1 + X - X^3)$.

20 Soient trois vecteurs de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:
$$U_1 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad U_2 = {}^t\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U_3 = {}^t\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Est-elle orthonormale pour le produit scalaire canonique ?
2. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire φ sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour lequel elle est orthonormale.

21 Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E et n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E tels que :
$$\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1.$$

1. Montrer que pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2\right).$$
2. En déduire que la famille $(e_i + u_i)_{i=1}^n$ est une base de E.

22 On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur le segment $[a,b]$ ($a < b$ réels) muni du produit scalaire usuel.

1. Soit $f \in E$. Justifier qu'il existe une unique fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $g'' = f$ et $g(a) = g(b) = 0$. Montrer qu'alors :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b g'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$
2. Déterminer l'orthogonal du sous-espace F des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Commenter.

23 ★ **Polynômes de Tchebychev**
On définit la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *polynômes de Tchebychev* par les termes initiaux $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ ainsi que la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. **a.** Calculer T_2 et T_3.
   b. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   c. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

Remarque. La propriété de la question **c.** est caractéristique des polynômes de Tchebychev. En utilisant cette formule ainsi que celles de Moivre et du binôme de Newton, il est possible d'expliciter les coefficients de T_n.

2. **a.** Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, justifier la convergence de l'intégrale
$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$
b. Montrer que l'application
$$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \longmapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
a. Montrer que la famille $(\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Est-elle orthonormale ?
b. Calculer $\|\mathrm{T}_n\|$ puis $\langle \mathrm{T}_n, \mathrm{X}^n\rangle$.

24 **Familles obtusangles** *(oral ESCP 2011, extrait)*

♣ Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On dit qu'une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E est *obtusangle* si, pour tout $i \neq j \in [\![1,p]\!]$, $\langle u_i, u_j\rangle < 0$ (ce qui impose aux vecteurs d'être tous non nuls).

On veut montrer par récurrence que si une famille de $p \geqslant 2$ vecteurs est obtusangle, alors toute sous-famille de $p-1$ vecteurs est libre.

1. Établir la propriété pour $p = 2$.
2. On suppose la propriété vérifiée pour toute famille obtusangle de $p+1 \geqslant 2$ vecteurs et on souhaite la démontrer pour une famille obtusangle $(u_1, \ldots, u_{p+2})$ de $p+2$ vecteurs. On suppose à cet effet que la sous-famille $(u_1, \ldots, u_{p+1})$ est liée.
a. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left\langle u_{p+1}, u_k\right\rangle > 0.$$
b. En déduire qu'il existe $k \in [\![1,p]\!]$ tel que $\lambda_k < 0$ et montrer que l'on peut supposer $k = p$.
c. En considérant la famille $(y_1, \ldots, y_{p+1})$ définie par :
$$\forall i \in [\![1,p-1]\!]\,,\, y_i = u_i, \qquad y_p = u_{p+1} - \lambda_p u_p, \qquad y_{p+1} = u_{p+2},$$
exhiber une contradiction.
d. Conclure.

Programmation :

- Classe : 2, 7, 10, 14, 15, 16, (17), 19, 20, 21, 22
- TD : 1, 3, 6, 8, 18
- DL : 23

Indications

2 Déterminer une forme bilinéaire symétrique définie-positive ψ telle que pour tout $X \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X,X) = \psi(X,X)$.

3 **2.** Montrer que :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)\,dx.$$

4 **1.** Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2$ et $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2$ à l'aide de l'hypothèse.

2. À l'aide de l'identité de polarisation, appliquer le résultat de la question **1.** à $f - f(0)$.

5 **1.** Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

6 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$.

7 Utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

8 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

9 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace fonctionnel.

10 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace fonctionnel.

11 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace fonctionnel.

13 **2.** Observer que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = \alpha \int_0^1 \mathbf{e}^{(i+j)\alpha t}\,dt.$$

14 Écrire A^2 sous la forme $A^2 = -{}^t AA$.

16 Montrer que $\langle e_i, e_j \rangle = 1/2$ pour tous $i \neq j$ et en déduire que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

18 **2.** Écrire les conditions $\langle e_1, e_4 \rangle = \langle e_2, e_4 \rangle = \langle e_3, e_4 \rangle = 0$ sous la forme d'un système d'inconnue e_4.

19 Construire une base (P_1, P_2, P_3) par récurrence : choisir P_{k+1} non nul et orthogonal à $1 + X - X^3, P_1, \ldots, P_k$ (au besoin, écrire ces relations d'orthogonalité sous la forme d'un système d'inconnue les coefficients de P_{k+1}).

23 **3.** **b.** On pourra écrire $T_n = a_n X^n + Q_n$ où $\deg Q_n < n$.