

Travaux dirigés
Produits scalaires et orthogonalité

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 1 / 37

Exercice 1 Q 1

Exercice 1

Question 1

L'application φ est la forme bilinéaire sur \mathbb{R}^2 canoniquement associée à la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_2 n'étant pas symétrique, la forme φ n'est pas symétrique. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi((x, y), (x, y)) = 4x^2 + y^2 \geq 0$$

et

$$\varphi((x, y), (x, y)) = 0 \implies (x, y) = (0, 0)$$

si bien que φ est définie-positive.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 2 / 37

Exercice 1 Q 1

La matrice de φ dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ s'obtient par le calcul des $\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$: on retrouve

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de la matrice de φ en base (e_1, e_2) peut se faire directement par celui des $\varphi(e_i, e_j)$:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

ou en utilisant la formule de changement de base : à partir de la matrice de passage

$$P = \text{Pass}((\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on obtient la matrice de φ en base (e_1, e_2) :

$$B_2 = {}^t P A_2 P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 3 / 37

Exercice 1 Q 2

Exercice 1

Question 2

L'application ψ est la forme bilinéaire sur \mathbb{R}^3 canoniquement associée à la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_3 étant symétrique, la forme ψ est symétrique. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \psi((x, y, z), (x, y, z)) &= x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy + 4yz \\ &= (x - y)^2 + (2y + z)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\psi((x, y, z), (x, y, z)) = 0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = y(1, 1, -2)$$

si bien que ψ est positive mais pas définie-positive : $\psi((1, 1, -2), (1, 1, -2)) = 0$ alors que $(1, 1, -2) \neq 0$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 4 / 37

Exercice 1 Q 2

La forme bilinéaire ψ est représentée en base canonique par la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la matrice B_3 représentative de ψ en base (e_1, e_2, e_3) par calcul direct des $\psi(e_i, e_j)$ ou par application de la formule de changement de base : à partir de la matrice de passage

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de passage de la base canonique vers la base (e_1, e_2, e_3) , le calcul donne :

$$B_3 = {}^t Q A_3 Q = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 5 / 37

Exercice 2

Exercice 2

Il s'agit de trouver une forme bilinéaire symétrique définie-positive ψ telle que :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \varphi(X, X) = \psi(X, X). \quad (*)$$

Or :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \varphi(X, X) = x^2 - 2xy + 2y^2.$$

La forme bilinéaire ψ canoniquement associée à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

vérifie donc la condition (*). Par ailleurs, B est symétrique et il en va donc de même de ψ . Enfin,

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \psi(X, X) = (x - y)^2 + y^2 \geq 0$$

avec égalité si, et seulement si, $x - y = y = 0$, i.e. $X = 0$, si bien que ψ est définie-positive.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 6 / 37

Exercice 3 Q 1

Exercice 3

Question 1

On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Le polynôme nul appartient à E qui est donc non vide.
- Pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$$

et de même $(\lambda P + Q)(1) = 0$ si bien que $\lambda P + Q$ appartient à E qui est donc stable par combinaison linéaire.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 7 / 37

Exercice 3 Q 2

Exercice 3

Question 2

Pour $P, Q \in E$, $\varphi(P, Q)$ est bien défini en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

- La linéarité de l'intégrale donne la linéarité à gauche de φ : pour $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= - \int_0^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t)) Q'(t) dt \\ &= -\lambda \int_0^1 P_1(t) Q'(t) dt - \int_0^1 P_2(t) Q'(t) dt = \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q). \end{aligned}$$

- on obtient par intégration par parties une nouvelle expression de

$$\begin{aligned} \varphi(P, Q) &= - \int_0^1 P(t) Q''(t) dt = - [P(t) Q'(t)]_0^1 + \int_0^1 P'(t) Q'(t) dt \\ &= \int_0^1 P'(t) Q'(t) dt \quad \text{car } P(0) = P(1) = 0 \end{aligned}$$

qui est clairement symétrique en P, Q et φ est donc symétrique.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 8 / 37

Exercice 3 Q 2

- Enfin, toujours d'après la nouvelle expression de φ , on a pour tout $P \in E$:

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 P'(t)^2 dt \geq 0$$
 avec égalité si, et seulement si, $P'(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ car l'application $t \mapsto P'(t)^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$. Cette dernière condition signifie que le polynôme P' est nul (car il admet une infinité de racines), c'est-à-dire que P est constant et plus précisément nul puisque $P(0) = 0$. La forme bilinéaire symétrique φ est donc définie-positive.

Ainsi φ est un produit scalaire sur E . La norme euclidienne associée est l'application

$$P \in E \mapsto \|P\| = \sqrt{\varphi(P, P)} = \sqrt{\int_0^1 P'(t)^2 dt}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 9 / 37

Exercice 5 Q 1

Exercice 5

Question 1

On a tout d'abord :

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \geq \sum_{i=1}^n 1 = n \geq 0$$

d'où :

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right)^2 \geq n^2.$$

L'inégalité de droite s'obtient par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique aux vecteurs $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n})$ et $(1, 1, 1, \dots, 1)$:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 10 / 37

Exercice 5 Q 2

Exercice 5

Question 2

On raisonne (à $n \geq 1$ fixé) par récurrence sur $k \geq 1$.

- Le résultat a été établi à la question 1. pour $k = 1$.
- Pour $k \geq 1$, on obtient comme en 1. :

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[k]{i} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt[k]{i} \right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n i \right)$$

d'où, si le résultat est acquis au rang k ,

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[k+1]{i} \right)^2 \leq n^2 \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

ce qui s'écrit encore (l'inégalité de gauche étant évidente, comme en 1.) :

$$n \leq \sum_{i=1}^n \sqrt[k+1]{i} \leq n \cdot \sqrt[k+1]{\frac{n+1}{2}}$$

et le résultat est donc démontré au rang $k + 1$.

D'après le principe de récurrence, le résultat est donc démontré à tout rang $k \geq 1$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 11 / 37

Exercice 6

Exercice 6

Il s'agit d'interpréter $\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ comme une norme et $x + y + z$ comme un produit scalaire. Deux possibilités :

- appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique aux vecteurs $(x, \sqrt{2}y, \sqrt{3}z)$ et $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$:

$$(x + y + z)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) (x^2 + 2y^2 + 3z^2) = \frac{11}{6} (x^2 + 2y^2 + 3z^2),$$
 d'où le résultat.
- appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire (exercice...)

$$(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto (u, v) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$$
 aux vecteurs (x, y, z) et $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$:

$$(x + y + z)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) (x^2 + 2y^2 + 3z^2) = \frac{11}{6} (x^2 + 2y^2 + 3z^2),$$
 d'où le résultat.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 12 / 37

Exercice 7

Exercice 7

Si un n -uplet (x_1, \dots, x_n) est solution, alors il réalise l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique aux vecteurs (x_1, \dots, x_n) et $(1, \dots, 1)$:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{n}.$$

Il existe donc un réel λ tel que $(x_1, \dots, x_n) = \lambda(1, \dots, 1)$. La condition $\sum x_i = n$ donne alors $\lambda = 1$ et il ne reste donc qu'un candidat : $(1, \dots, 1)$, dont on vérifie sans difficulté qu'il est bien solution.

En conclusion, le problème proposé admet $(1, \dots, 1)$ comme unique solution.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 13 / 37

Exercice 8

Exercice 8

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique

$$(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} n_{i,j} = \text{tr}(MN).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $A \in M_n(\mathbb{R})$ et à I_n s'écrit :

$$|\langle I_n, A \rangle| \leq \|I_n\| \|A\|$$

ou encore :

$$|\text{tr } A| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2}.$$

Le cas d'égalité se produit si, et seulement si, la famille (A, I_n) est liée i.e. si, et seulement si, la matrice A est scalaire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 14 / 37

Exercice 9 Q 1

Exercice 9

Question 1

Deux méthodes sont possibles :

- Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel aux fonctions $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$:

$$\left| \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2} dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}} \sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2} dt} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2} dt}.$$
- Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire (exercice)

$$(g, h) \mapsto \langle g, h \rangle = \int_0^1 \frac{g(t)h(t)}{1+t^2} dt$$
 aux fonctions f et $t \mapsto 1$.

Le cas d'égalité a lieu si, et seulement si, la famille $(f, t \mapsto 1)$ est liée i.e. si, et seulement si, f est constante.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 15 / 37

Exercice 9 Q 2

Exercice 9

Question 2

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire (exercice)

$$(g, h) \mapsto \langle g, h \rangle = \int_0^1 \frac{g(t)h(t)}{1+t^2} dt$$

aux fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et f , on obtient :

$$\left| \int_0^1 \frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2} dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt} \sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2} dt}$$

d'où le résultat puisque

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Le cas d'égalité est réalisé si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = \lambda \sqrt{t}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 16 / 37

Exercice 10

D'après le théorème fondamental appliqué à f de classe \mathcal{C}^1 , on a pour tout $x \in [a, b]$:

$$|f(x)| = \left| f(a) + \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)| dt$$

d'où, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans l'espace $\mathcal{C}([a, x], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique aux fonctions $t \mapsto |f'(t)|$ et $t \mapsto 1$:

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &\leq \left(\int_a^x |f'(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_a^x dt \right) \left(\int_a^x f'(t)^2 dt \right) \\ &\leq (x-a) \int_a^x f'(t)^2 dt \leq (x-a) \int_a^b f'(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Il en résulte, par croissance et linéarité de l'intégrale, que :

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \left(\int_a^b (t-a) dt \right) \left(\int_a^b f'(t)^2 dt \right) = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'(t)^2 dt.$$

Exercice 12

Tout d'abord, on a $0 \leq \frac{1}{X} \leq 1$ puisque X est à valeurs dans \mathbb{N}^* , si bien que $\frac{1}{X}$ admet une espérance par domination.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $p_k = P(X = k)$. Par définition et d'après le théorème de transfert,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \quad \text{et} \quad E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique appliquée aux vecteurs $(\sqrt{k p_k})_{1 \leq k \leq n}$ et $(\sqrt{\frac{p_k}{k}})_{1 \leq k \leq n}$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k \right) = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k p_k} \sqrt{\frac{p_k}{k}} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k p_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{k} \right).$$

En passant aux limites (qui existent) lorsque $n \rightarrow \infty$, on obtient donc :

$$1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k \right)^2 \leq E(X) E\left(\frac{1}{X}\right),$$

d'où le résultat.

Exercice 14

On a $A^2 = -{}^tAA$ d'où, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXA^2X = -{}^tX(A)(AX) = -\|AX\|^2 \leq 0$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si λ est une valeur propre de A^2 , il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A^2X = \lambda X$ et l'on a donc

$${}^tXA^2X = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2 \leq 0$$

d'où, puisque $\|X\|^2 > 0$ étant donné que $X \neq 0$, l'on déduit que $\lambda \leq 0$. Ainsi les valeurs propres de A^2 sont toutes négatives ou nulles.

Exercice 15

On a tout d'abord l'inclusion $\text{Ker } A \subset \text{Ker } {}^tAA$. En effet, pour $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = 0 \implies {}^tAA X = 0.$$

Réciproquement, si ${}^tAA X = 0$ alors, en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|AX\|^2 = {}^tX(A)(AX) = {}^tX {}^tAA X = 0,$$

ce qui implique $AX = 0$ par propriété de séparation de la norme. L'égalité $\text{Ker } A = \text{Ker } {}^tAA$ est donc établie. Le théorème du rang appliqué aux applications linéaires canoniquement associés à A et tAA donne ensuite :

$$p = \dim(\text{Ker } A) + \text{rg } A$$

ainsi que :

$$p = \dim(\text{Ker } {}^tAA) + \text{rg } {}^tAA,$$

d'où l'on déduit que $\text{rg } A = \text{rg } {}^tAA$.

Exercice 16

Pour $i \neq j$, on a :

$$1 = \|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 - 2\langle e_i, e_j \rangle + \|e_j\|^2$$

d'où, puisque les vecteurs e_1, \dots, e_n sont unitaires, $\langle e_i, e_j \rangle = \frac{1}{2}$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$. En prenant le produit scalaire contre chaque vecteur e_i , on obtient les relations :

$$\forall i \in [1, n], \quad 0 = \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle \lambda_j.$$

Le vecteur $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est donc solution du système linéaire

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + 2\lambda_n = 0 \end{cases}$$

En sommant toutes les relations, on obtient $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ d'où l'on déduit ensuite (d'après les relations restantes dans le système) que $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in [1, n]$.

Ainsi la famille (e_1, \dots, e_n) est libre. Formée de n vecteurs en dimension n , c'est donc une base de E .

Exercice 17

Question 1

L'application f est définie sur E et à valeurs dans E . Elle est linéaire par linéarité à droite du produit scalaire : pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \lambda x + y + a \langle u, \lambda x + y \rangle u = \lambda x + y + a(\lambda \langle u, x \rangle + \langle u, y \rangle) u \\ &= \lambda(x + a \langle u, x \rangle u) + (y + a \langle u, y \rangle u) = \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

L'application f est donc un endomorphisme de E .

Exercice 17

Question 2

Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda x &\iff (\lambda - 1)x = a \langle x, u \rangle u \\ &\implies \left((\lambda \neq 1 \text{ et } x \in \text{Vect } u) \text{ ou } (\lambda = 1 \text{ et } \langle x, u \rangle = 0) \right). \end{aligned}$$

Réciproquement,

- $\langle u, x \rangle = 0$ implique $f(x) = x$. Or les vecteurs orthogonaux à u composent le noyau de la forme linéaire non nulle $x \mapsto \langle u, x \rangle$, c'est-à-dire l'hyperplan $(\text{Vect } u)^\perp$ orthogonal à u ; celui-ci est non nul si, et seulement si, $n \geq 2$. Ainsi 1 est valeur propre de f si, et seulement si, $n \geq 2$ avec pour sous-espace propre associé Le sous-espace propre associé l'hyperplan $(\text{Vect } u)^\perp$.
- Les autres vecteurs propres éventuels sont sur la droite dirigée par u . Or $f(u) = u + a \langle u, u \rangle u = (a+1)u$ donc la seule autre valeur propre possible est $a+1$, qui est effectivement valeur propre de f . Puisque $a \neq 0$, le sous-espace propre associé est la droite dirigée par u .

Exercice 17 Q 2

D'après l'étude précédente,

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp } f} \dim E_{\lambda}(f) = \dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) = (n-1) + 1 = n$$

si bien que f est diagonalisable.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 25 / 37

Exercice 18 Q 1

Exercice 18

Question 1

On vérifie que

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$$

ainsi que

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est donc orthonormale.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 26 / 37

Exercice 18 Q 2

Exercice 18

Question 2

On envisage un vecteur $e_4 = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Pour que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) soit orthonormale, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \langle e_4, e_1 \rangle = 0 \\ \langle e_4, e_2 \rangle = 0 \\ \langle e_4, e_3 \rangle = 0 \\ \|e_4\|^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = x \\ z = -x \\ y = -x \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Seuls deux vecteurs réalisent donc ces conditions : $\pm \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$.
 Pour chacun d'eux, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est orthonormale donc libre, formée de 4 vecteurs en dimension 4 ; c'est une base orthonormale de \mathbb{R}^4 .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 27 / 37

Exercice 19

Exercice 19

Soit $P_0 = 1 + X - X^3$. Un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ appartient à F^{\perp} si, et seulement si,

$$\langle P_0, P \rangle = 0 \iff a_0 + a_1 - a_3 = 0.$$

L'équation précédente est celle d'un hyperplan : le sous-espace F^{\perp} est donc de dimension 3.
 Il s'agit de construire une famille orthogonale de F^{\perp} formée de trois vecteurs non nuls de F^{\perp} . Le vecteur $P_1 = X^2$ est tout d'abord orthogonal à P_0 donc à F . Puis $P_2 = 1 - X$ est orthogonal à P_0 (donc à F) et P_1 .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 28 / 37

Exercice 19

Le choix du vecteur suivant étant moins évident, on peut détailler les conditions qui portent sur ses coefficients : un vecteur $P_3 = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ est orthogonal à P_0, P_1 et P_2 si, et seulement si, ses coefficients sont solutions du système ci-dessous

$$\begin{cases} a_0 + a_1 - a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_3 = 2a_0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = a_0 \end{cases}$$

On met ainsi en évidence (par exemple) le vecteur $P_3 = 1 + X + 2X^3$.
 On a ainsi construit une famille orthogonale (P_1, P_2, P_3) de vecteurs non nuls de F^{\perp} , donc une famille libre de F^{\perp} , formée de 3 vecteurs en dimension 3 : c'est donc une base orthogonale de F^{\perp} .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 29 / 37

Exercice 20 Q 1

Exercice 20

Question 1

On vérifie que la famille \underline{U} est libre. Formée de 3 vecteurs en dimension 3, c'est donc une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 Cependant $\langle U_1, U_2 \rangle = -1$ et cette base n'est donc pas orthonormale pour le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 30 / 37

Exercice 20 Q 2

Exercice 20

Question 2

Soient φ un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et A sa matrice représentative en base canonique. Sa matrice B en base \underline{U} est donnée par la formule $B = {}^tPAP$ où P désigne la matrice de passage de la base canonique à la base \underline{U} :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La base \underline{U} est orthonormale pour le produit scalaire φ si, et seulement si $B = I_n$, c'est-à-dire $A = {}^tQQ$ où $Q = P^{-1}$ (et ${}^tQ = {}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$). Il y a donc unicité du produit scalaire φ rendant la base \underline{U} orthonormale.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 31 / 37

Exercice 20 Q 2

Reste réciproquement à vérifier que la matrice précédente

$$A = {}^tQQ = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

définit un produit scalaire φ (pour lequel la base \underline{U} sera orthonormale d'après le raisonnement précédent).
 Tout d'abord la matrice A est symétrique : ${}^tA = {}^t({}^tQQ) = {}^tQQ = A$ donc φ est symétrique.
 Puis, pour $X \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi(X, X) = {}^tXAX = {}^tX{}^tQQX = ({}^tQX)(QX) = \|QX\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 On a donc $\varphi(X, X) \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $QX = 0$ (par séparation de la norme) c'est-à-dire, puisque Q est inversible, $X = 0$. La forme φ est donc définie-positive. C'est bien un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 Il existe donc un unique produit scalaire sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour lequel la base \underline{U} est orthonormale.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 32 / 37

Exercice 21 Q 1

Exercice 21

Question 1

On a tout d'abord d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|u_i\| \right)^2$$

puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n euclidien canonique appliquée aux vecteurs $(|\lambda_i|)_i$ et $(\|u_i\|)_i$:

$$\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|u_i\| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right),$$

d'où le résultat.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 33 / 37

Exercice 21 Q 2

Exercice 21

Question 2

Comme la famille est formée de n vecteurs dans E de dimension n , il suffit de montrer qu'elle est libre. Or, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont tels que $\sum_i \lambda_i (e_i + u_i) = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Mais la base $(e_i)_{i=1}^n$ étant orthonormale, on peut appliquer le théorème de Pythagore à la famille orthogonale $(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

et l'inégalité de la question 1. donne donc :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right),$$

ce qui n'est possible que si $\sum_i \lambda_i^2 = 0$ puisque $\sum_i \|u_i\|^2 < 1$ par hypothèse, et l'on a donc nécessairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 34 / 37

Exercice 22 Q 1

Exercice 22

Question 1

Soient g_1 une primitive de f et g_2 une primitive de g_1 (qui existent car f puis g_1 sont continues).

Les primitives de f sont les fonctions de la forme $g_1 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions g de classe \mathcal{C}^2 telles que $g'' = f$, qui sont les primitives des fonctions précédentes, sont donc les fonctions de la forme $g : x \mapsto g_2(x) + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Une telle fonction satisfait aux conditions $g(a) = g(b) = 0$ si, et seulement si α et β sont solutions du système

$$\begin{cases} g_2(a) + \alpha a + \beta = 0 \\ g_2(b) + \alpha b + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha a + \beta = -g_2(a) \\ \alpha b + \beta = -g_2(b) \end{cases}.$$

Ce système étant de Cramer car $a \neq b$, il existe donc une unique fonction g de classe \mathcal{C}^2 telle que $g'' = f$ et $g(a) = g(b) = 0$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 35 / 37

Exercice 22 Q 1

On obtient alors, par intégration par parties, en dérivant g et en primitivant $f = g''$:

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = [g'(t)g(t)]_a^b - \int_a^b g'(t)^2 dt = - \int_a^b g'(t)^2 dt$$

puisque $g(a) = g(b) = 0$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 36 / 37

Exercice 22 Q 2

Exercice 22

Question 2

Si $f \in F^\perp$ alors, en notant g la fonction qui lui a été associée dans la question 1., on a $\langle f, g \rangle = 0$ car $g \in F$ donc, d'après 1.,

$$\int_a^b g'(t)^2 dt = 0.$$

La fonction g'^2 étant continue et positive, on en déduit que g' est identiquement nulle sur $[a, b]$. Par suite, $f = g''$ est également nulle sur $[a, b]$.

On a ainsi établi que l'orthogonal de F est nul : $F^\perp = \{0\}$.

La somme directe $F \oplus F^\perp = F$ n'est donc pas égale à E et le double orthogonal $F^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$ pas égal à F .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 37 / 37