

**Travaux dirigés**  
Variables aléatoires à densité

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      1 / 86

Exercice 1      Q 1

### Exercice 1

Question 1

La fonction  $f$  est une densité de probabilité si, et seulement si :

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , sauf peut-être en un nombre fini de points ;
- $f$  est positive ;
- l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut 1.

La première condition est satisfaite, la seconde l'est si, et seulement si,  $c \geq 0$ . Enfin, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge car  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et nulle en dehors, avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 \frac{c}{(1+t)^2} dt = \left[ -\frac{c}{1+t} \right]_0^1 = \frac{c}{2}.$$

La fonction  $f$  est donc une densité si, et seulement si,  $c = 2$ .

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      2 / 86

Exercice 1      Q 1

La fonction  $f$  est représentée ci-dessous

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      3 / 86

Exercice 1      Q 2

### Exercice 1

Question 2

La fonction de répartition  $F$  est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

- Si  $x < 0$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

- Si  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{2t}{(1+t)^2} dt = \frac{2x}{1+x}$$

- Si  $x > 1$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 \frac{2t}{(1+t)^2} dt + \int_1^x 0 dt = 1.$$

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      4 / 86

Exercice 1      Q 2

La fonction de répartition

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x}{1+x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

est représentée ci-dessous :

*Remarque.* On constate que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0 et 1.

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      5 / 86

Exercice 1      Q 3

### Exercice 1

Question 3

On a :

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 f(t) dt = 1.$$

La variable  $X$  est donc presque sûrement bornée et admet à ce titre des moments à tous ordres. En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = 2 \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt \\ &= 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      6 / 86

Exercice 1      Q 3

D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}((1+X)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+t)^2 f(t) dt = \int_0^1 2 dt = 2$$

d'où l'on déduit, d'après la formule de Koëinig-Huygens, l'expression de

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}((X+1)^2) - 2\mathbb{E}(X) - 1 = \mathbb{E}(X^2) = 2 - 4(\ln 2)^2.$$

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      7 / 86

Exercice 2      Q 1

### Exercice 2

Question 1

La fonction  $f$  est continue sur  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  (donc sur  $\mathbb{R}$  sauf en un nombre fini de points) et positive. Par ailleurs, on a trivialement la convergence de

$$\int_{-\infty}^0 f(t) dt = 0$$

et on obtient sans difficulté

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x te^{-t^2/2} dt = [-e^{-t^2/2}]_0^x = 1 - e^{-x^2/2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

d'où la convergence et la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Toutes les conditions sont donc réunies pour que  $f$  soit une densité de probabilité.

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      8 / 86

Exercice 2 Q 1

Une brève étude de la fonction  $f$  permet d'en esquisser le graphe :

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 9 / 86

Exercice 2 Q 2

### Exercice 2

Question 2

La fonction de répartition  $F$  de  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  avec  $F' = f$ . Elle est donc constante sur  $]-\infty, 0[$ , égale à sa limite en  $-\infty$  :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F = 0.$$

Vu le calcul de primitive de la question a., il existe une constante  $C$  telle que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = C - e^{-x^2/2}.$$

La constante  $C = 1$  peut être obtenue par passage à la limite lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .  
*Remarque.* La constante  $C$  peut aussi être déterminée en utilisant la continuité de  $F$  en 0 et les expressions de  $F$  sur  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 10 / 86

Exercice 2 Q 2

Ci-dessous la représentation graphique de la fonction de répartition

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 11 / 86

Exercice 2 Q 3

### Exercice 2

Question 3

La fonction  $f$  est nulle au voisinage de  $-\infty$  et l'on a

$$0 \leq xf(x) = x^2 e^{-x^2/2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

d'où la convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  et l'existence de l'espérance

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt.$$

Pour le calcul de  $E(X)$ , on procède par intégration par parties sur un segment  $[0, x] \subset [0, +\infty[$  :

$$\int_0^x t^2 e^{-t^2/2} dt = \int_0^x t \cdot te^{-t^2/2} dt = [-te^{-t^2/2}]_0^x + \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

En passant à la limite (qui existe) lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 12 / 86

Exercice 2 Q 3

Le changement de variable affine  $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$  donne alors :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On justifie l'existence et on calcule de même

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt \\ &= [-t^2 e^{-t^2/2}]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} te^{-t^2/2} dt = 2 \end{aligned}$$

La formule de Koëning-Huygens donne alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

*Remarque.* Les intégrales  $E(X)$  et  $E(X^2)$  peuvent aussi être calculées grâce au changement de variable  $u = t^2/2$  puis en se rapprochant de la fonction  $\Gamma$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 13 / 86

Exercice 2 Q 4

### Exercice 2

Question 4

Pour  $y < 0$ , on a  $P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = 0$ .  
 Pour  $y \geq 0$ , il vient :

$$P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y})$$

Or

$$P(X \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt = 0$$

et  $X$  est presque sûrement positive. D'où :

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = 1 - e^{-y/2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 14 / 86

Exercice 2 Q 4

Ainsi  $Y$  a pour fonction de répartition

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-y/2} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  (donc sur  $\mathbb{R}$  sauf en un nombre fini de points). La variable  $Y$  est donc à densité, de densité (par exemple)

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-y/2} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}.$$

On reconnaît la densité de la loi  $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$ .  
*Remarque.* On peut conclure plus tôt si on reconnaît la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 15 / 86

Exercice 4 Q 1.a

### Exercice 4

Question 1.a

Soient  $n \geq 1$  et  $m \geq 1$ . Tout d'abord l'intégrale  $\beta(n, m)$  est bien définie car la fonction  $t \mapsto t^{n-1}(1-t)^{m-1}$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ .  
 Le changement de variable affine  $u = 1 - t$  donne  $\beta(n, m) = \beta(m, n)$ .  
 Puis, si  $m \geq 2$ , les fonctions  $t \mapsto (1-t)^{m-1}$  et  $t \mapsto t^n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0, 1]$ . Une intégration est donc possible :

$$\begin{aligned} \beta(n, m) &= \frac{1}{n} [t^n (1-t)^{m-1}]_0^1 + \frac{m-1}{n} \int_0^1 t^n (1-t)^{m-2} dt \\ &= \frac{m-1}{n} \beta(n+1, m-1). \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 16 / 86

Exercice 4 Q 1.b

### Exercice 4

Question 1.b

On démontre par récurrence sur  $m \geq 1$  le prédicat :

$$\forall n \geq 1, \beta(n, m) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(n+m-1)!}.$$

Le résultat est vrai pour  $m = 1$  :

$$\forall n \geq 1, \beta(n, 1) = \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n}.$$

Si, pour  $m \geq 2$ , le résultat est acquis jusqu'au rang  $m-1$ , alors pour tout  $n \geq 1$  :

$$\beta(n, m) = \frac{m-1}{n} \beta(n+1, m-1) = \frac{m-1}{n} \frac{(m-2)!n!}{(n+m-1)!} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(n+m-1)!}$$

et le résultat est démontré au rang  $m$ . On conclut par le principe de récurrence.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 17 / 86

Exercice 4 Q 2.a

### Exercice 4

Question 2.a

La fonction  $f_{n,m}$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , positive, et on a par définition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n,m}(t) dt = \frac{1}{\beta(n, m)} \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1} dt = 1.$$

La fonction  $f_{n,m}$  est donc une densité de probabilité.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 18 / 86

Exercice 4 Q 2.b

### Exercice 4

Question 2.b

La densité  $f_{n,m}$  étant à support borné, la variable  $X$  est presque sûrement bornée. Elle admet donc des moments à l'ordre 1 et 2, c'est-à-dire une espérance et une variance.

On a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{n,m}(t) dt = \frac{1}{\beta(n, m)} \int_0^1 t^n (1-t)^{m-1} dt = \frac{\beta(n+1, m)}{\beta(n, m)} = \frac{(m-1)!n!}{(n+m)!} \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!(n-1)!} = \frac{n}{n+m}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 19 / 86

Exercice 4 Q 2.b

De même,  $X$  admet pour moment d'ordre 2

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{n,m}(t) dt = \frac{1}{\beta(n, m)} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{m-1} dt = \frac{\beta(n+2, m)}{\beta(n, m)} = \frac{(m-1)!(n+1)!}{(n+m+1)!} \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{(n+m+1)(n+m)}$$

et donc pour variance :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{nm}{(n+m)^2(n+m+1)}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 20 / 86

Exercice 5 Q 1.a

### Exercice 5

Question 1.a

La fonction proposée est continue (à droite) et croissante sur  $\mathbb{R}$  et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1.$$

C'est donc une fonction de répartition. Comme elle est de plus (continue et) de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , toute variable  $X$  de fonction de répartition  $F$  est à densité donnée par

$$f : x \mapsto F'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 21 / 86

Exercice 5 Q 1.b

### Exercice 5

Question 1.b

Pour  $k \in \{1, 2\}$ , on a

$$t^k f(t) \sim t^k e^{-|t|} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \rightarrow \pm\infty,$$

d'où l'on déduit que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t) dt$  converge par comparaison aux intégrales de Riemann convergentes  $\int_{-\infty}^{-1} dt/t^2$  et  $\int_1^{+\infty} dt/t^2$ . Ainsi  $X$  admet des moments d'ordres 1 et 2 donc une espérance et une variance.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 22 / 86

Exercice 5 Q 1.c

### Exercice 5

Question 1.c

La densité de  $X$  étant paire (si, si), l'espérance de  $X$  est nulle. On peut aussi obtenir le résultat par intégration par parties puis changement de variable  $u = e^t$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 23 / 86

Exercice 5 Q 2.a

### Exercice 5

Question 2.a

Une étude de la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

permet d'en dresser le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\varphi$	$-1$	$+\infty$	$1$

Il en résulte que  $\varphi$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  et que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad P(Y \leq y) = \begin{cases} P(\varphi^{-1}(y) \leq X < 0) & \text{si } y < -1 \\ P(X < 0) & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \\ P(X < 0) + P(X \geq \varphi^{-1}(y)) & \text{si } y > 1 \end{cases}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 24 / 86

Exercice 5 Q 2.a

La fonction de répartition de  $Y = \varphi(X)$  s'exprime donc en fonction de celle de  $X$  :

$$\forall y \in \mathbb{R}, F_Y(y) = \begin{cases} F(0) - F(\varphi^{-1}(y)) & \text{si } y < -1 \\ F(0) & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \\ F(0) + 1 - F(\varphi^{-1}(y)) & \text{si } y > 1 \end{cases} .$$

On obtient sans difficulté l'expression de

$$\forall y \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[, \varphi^{-1}(y) = \ln \frac{y+1}{y-1},$$

ce qui permet de préciser celle de  $F_Y$  :

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2y} & \text{si } y < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2y} & \text{si } y > 1 \end{cases} .$$

Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}$  (même en  $-1$  et en  $1$ ) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , si bien que  $Y$  est à densité donnée par

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{2y^2} & \text{sinon} \end{cases} .$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 25 / 86

Exercice 5 Q 2.b

### Exercice 5

Question 2.b

La variable  $Y$  n'admet pas d'espérance car l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt$  diverge par comparaison (directe!) à l'intégrale de Riemann divergente  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 26 / 86

Exercice 6 Q 1

### Exercice 6

Question 1

La variable  $X$  admet pour densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{3} \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La variable  $X$  (ainsi donc que ses puissances) étant presque sûrement bornée, elle admet des moments à tous ordres. Par suite,  $X^2$  admet des moments d'ordre 1 et 2, donc espérance et variance. D'après le théorème de transfert,

$$E(Z) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 t^2 dt = 1$$

et

$$E(Z^2) = E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 f_X(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 t^4 dt = \frac{11}{5}$$

d'où, d'après la formule de Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{6}{5}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 27 / 86

Exercice 6 Q 2

### Exercice 6

Question 2

Pour  $z < 0$ ,  $P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = 0$ . Pour  $z \geq 0$ ,

$$P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f_X(t) dt.$$

Par suite,  $Z$  admet pour fonction de répartition

$$F_Z : z \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{z} & \text{si } 0 < z \leq 1 \\ \frac{1}{3}(1 + \sqrt{z}) & \text{si } 1 < z \leq 4 \\ 1 & \text{si } z > 4 \end{cases} ,$$

continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0, 1 et 4) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 4\}$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 28 / 86

Exercice 6 Q 2

La variable  $Z$  est donc à densité, avec par exemple pour densité :

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{z}} & \text{si } 0 < z < 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{z}} & \text{si } 1 < z < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Cette densité permet de retrouver l'espérance et la variance de  $Z$  :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{t} dt + \frac{1}{6} \int_1^4 \sqrt{t} dt = 1$$

puis

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{3/2} dt + \frac{1}{6} \int_1^4 t^{3/2} dt = \frac{11}{5}$$

d'où  $V(Z) = \frac{6}{5}$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 29 / 86

Exercice 7

### Exercice 7

La variable  $X$  admet pour densité la fonction

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi} \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour fonction de répartition

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}(x + \frac{\pi}{2}) & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

Pour  $y \in \mathbb{R}$ , on a par stricte croissance de la fonction arctan :

$$F_Y(y) = P(\tan X \leq y) = P(X \leq \arctan y) = F_X(\arctan y).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 30 / 86

Exercice 7

D'où la fonction de répartition de  $Y$  :

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi} \arctan y + \frac{1}{2}.$$

Celle-ci étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , la variable aléatoire  $Y$  est à densité donnée par

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}.$$

Ainsi  $Y$  suit une loi de Cauchy (HP) et l'on a vu en exemple dans le cours qu'elle n'admet pas d'espérance puisque l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$$

diverge par comparaison à l'intégrale de Riemann divergente  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  : en effet,

$$t f_Y(t) \sim \frac{1}{t} \geq 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 31 / 86

Exercice 8 Q 1

### Exercice 8

Question 1

Les variables  $U_i$  ont même fonction de répartition

$$F_{U_i} : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases} .$$

Or, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$P(X \leq x) = P(\max(U_1, U_2, \dots, U_n) \leq x) = P(U_1 \leq x, U_2 \leq x, \dots, U_n \leq x).$$

d'où, par indépendance mutuelle de  $U_1, \dots, U_n$  :

$$P(X \leq x) = P(U_1 \leq x) P(U_2 \leq x) \cdots P(U_n \leq x) = F_{U_i}(x)^n.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 32 / 86

On en déduit la fonction de répartition de  $X$  :

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

La fonction précédente est continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0 et 1) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . La variable  $X$  est donc à densité, de densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La variable  $X$  (ainsi donc que ses puissances) est donc presque sûrement bornée :

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 f_X(t) dt = \int_0^1 nt^{n-1} dt = 1.$$

À ce titre, elle admet des moments d'ordre 1 et 2 et par suite espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t) dt = \int_0^1 nt^n dt = \frac{n}{n+1}$$

puis, d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt = \int_0^1 nt^{n+1} dt = \frac{n}{n+2}$$

et donc :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

## Exercice 8

### Question 2

De même, pour  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(\min(U_1, U_2, \dots, U_n) \leq y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min(U_1, U_2, \dots, U_n) > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(U_1 > y, U_2 > y, \dots, U_n > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(U_1 > y) \mathbb{P}(U_2 > y) \cdots \mathbb{P}(U_n > y) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(U_i \leq y)) = 1 - (1 - F_{U_i}(y))^n \end{aligned}$$

d'où la fonction de répartition de  $Y$  :

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - (1 - y)^n & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases} .$$

La variable  $Y$  est donc à densité donnée par

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} n(1-y)^{n-1} & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La variable  $Y$  étant presque sûrement bornée, elle admet espérance et variance (que l'on peut par exemple calculer grâce au changement de variable  $u = 1 - t$ ) :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 nt(1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n+1},$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^1 nt^2(1-t)^{n-1} dt = \frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

## Exercice 9

### Question 1

Les variables  $X$  et  $Y$  ont respectivement pour densités :

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y : x \mapsto \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Ces deux variables étant indépendantes avec des densités bornées (il suffirait que l'une le soit), leur somme est aussi à densité, donnée par

$$f_{X+Y} = f_X * f_Y : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt.$$

Pour  $x, t \in \mathbb{R}$ ,  $f_X(t) f_Y(x-t) \neq 0$  équivaut à  $0 \leq t \leq x$ .

- Pour  $x < 0$ , aucun réel  $t$  ne satisfait l'inégalité précédente, si bien que  $f_{X+Y}(x) = 0$ .
- Pour  $x \geq 0$ , le domaine d'intégration utile est l'intervalle  $[0, x]$  :

$$f_{X+Y}(x) = \int_0^x e^{-t} 2e^{-2(x-t)} dt = 2e^{-2x} \int_0^x e^t dt = 2e^{-x}(1 - e^{-x}).$$

En conclusion,  $X + Y$  admet pour densité

$$f_{X+Y} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 2e^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

## Exercice 9

### Question 2

Les variables  $X$  et  $Y$  ont respectivement pour densités :

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y : x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Ces deux variables étant indépendantes avec des densités bornées (il suffirait que l'une le soit), leur somme est aussi à densité, donnée par

$$f_{X+Y} = f_X * f_Y : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt.$$

Pour  $x, t \in \mathbb{R}$ ,  $f_X(t) f_Y(x-t) \neq 0$  équivaut à  $t \in [0, 1] \cap ]-\infty, x]$ .

- Si  $x < 0$ , alors  $f_X(t) f_Y(x-t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , si bien que  $f_{X+Y}(x) = 0$ .
- Si  $0 \leq x \leq 1$ , l'intervalle d'intégration utile est  $[0, 1] \cap ]-\infty, x] = [0, x]$  :

$$f_{X+Y}(x) = \int_0^x e^{-(x-t)} dt = e^{-x} \int_0^x e^t dt = 1 - e^{-x}.$$

- Si  $x > 1$ , l'intervalle d'intégration utile est  $[0, 1] \cap ]-\infty, x] = [0, 1]$  :

$$f_{X+Y}(x) = \int_0^1 e^{-(x-t)} dt = e^{-x} \int_0^1 e^t dt = (e-1)e^{-x}.$$

En conclusion,  $X + Y$  admet pour densité

$$f_{X+Y} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (e-1)e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

Exercice 10

### Exercice 10

On obtient par convolution la densité de  $X + Y$  :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3-x}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x-2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

puis celle de  $(X + Y) + Z$  :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{12} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2x-1}{12} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{(x-1)(5-x)}{12} & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{11-2x}{12} & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ \frac{(6-x)^2}{12} & \text{si } 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 41 / 86

Exercice 11 Q 1

### Exercice 11

Question 1

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on calcule

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2x\lambda + y.$$

On obtient un trinôme de discriminant  $\Delta = 4(x^2 - y)$ .

- Si  $\Delta > 0$ , alors  $A$  présente deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable;
- Si  $\Delta < 0$ , alors  $A$  ne présente aucune valeur propre donc n'est pas diagonalisable;
- Si  $\Delta = 0$ , alors  $A$  présente une unique valeur propre; n'étant pas diagonale, la matrice  $A$  n'est dans ce cas pas diagonalisable.

En conclusion, la matrice  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $x^2 - y > 0$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 42 / 86

Exercice 11 Q 2.a

### Exercice 11

Question 2.a

Étant donné que  $X \geq 0$  presque sûrement, on a pour  $x \geq 0$  :

$$\mathbb{P}(X^2 \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{x}) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

alors que bien sûr  $\mathbb{P}(X^2 \leq x) = 0$  si  $x < 0$ . La fonction de répartition de la variable  $X^2$  est donc donnée par :

$$F_{X^2} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Elle est continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0 et 1), de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad F'_{X^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où l'on déduit une densité de  $X^2$  :

$$f_{X^2} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 43 / 86

Exercice 11 Q 2.b

### Exercice 11

Question 2.b

Pour  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(-Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \geq -y) = 1 - \mathbb{P}(Y < -y),$$

d'où la fonction de répartition de  $-Y$  est donnée par :

$$F_{-Y} : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \\ 1 + y & \text{si } -1 \leq y \leq 0 \\ 1 & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Celle-ci est continue sur  $\mathbb{R}$  (même en  $-1$  et  $0$ ), de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$  avec :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad F'_{-Y}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où une fonction densité de  $-Y$  :

$$f_{-Y} : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 44 / 86

Exercice 11 Q 2.c

### Exercice 11

Question 2.c

Puisque les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes par hypothèse, les variables  $X^2$  et  $-Y$  le sont aussi. Comme par ailleurs la densité  $f_{-Y}$  est bornée, la variable  $Z = X^2 - Y$  admet pour densité

$$f_Z = f_{X^2} * f_{-Y} : z \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{-Y}(z-t) dt.$$

Pour que  $f_{X^2}(t) f_{-Y}(z-t) \neq 0$ , il faut que  $0 \leq t \leq 1$  et  $-1 \leq z-t \leq 0$ , i.e.  $t \in [0, 1] \cap [z, z+1]$ .

- Si  $-1 \leq z < 0$ , alors  $[0, 1] \cap [z, z+1] = [0, z+1]$  d'où
 
$$f_Z(z) = \int_0^{z+1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{z+1}.$$
- Si  $0 \leq z \leq 1$ , alors  $[0, 1] \cap [z, z+1] = [z, 1]$  d'où
 
$$f_Z(z) = \int_z^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 1 - \sqrt{z}.$$
- Sinon,  $z+1 < 0$  ou  $z > 1$  et alors  $[0, 1] \cap [z, z+1] = \emptyset$  d'où  $f_Z(z) = 0$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 45 / 86

Exercice 11 Q 2.d

### Exercice 11

Question 2.d

D'après la question 1., l'événement «  $M$  est diagonalisable » est réalisé si, et seulement si,  $Z = X^2 - Y > 0$  et a donc pour probabilité, d'après la question c. :

$$\mathbb{P}(Z > 0) = \int_0^{+\infty} f_Z(t) dt = \int_0^1 (1 - \sqrt{t}) dt = \frac{1}{3}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 46 / 86

Exercice 13 Q 1

### Exercice 13

Question 1

Les variables  $X$  et  $Y$  ont pour fonction de répartition commune

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/r & \text{si } 0 \leq x \leq r \\ 1 & \text{si } x > r \end{cases}$$

Pour  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(X \leq re^u) = F(re^u) = \begin{cases} e^u & \text{si } u \leq 0 \\ 1 & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

La variable  $U$ , qui admet ainsi une fonction de répartition continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ , est donc à densité donnée par

$$f_U : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^u & \text{si } u < 0 \\ 0 & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 47 / 86

Exercice 13 Q 1

Comme  $X$  et  $Y$  ont même loi, les variables  $U = \ln(X/r)$  et  $-V = \ln(Y/r)$  ont également même loi. Par suite, pour  $v \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(-V \geq -v) = \mathbb{P}(U \geq -v) = 1 - F_U(-v).$$

La variable  $V$  admet donc pour fonction de répartition

$$F_V : v \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 1 - e^{-v} & \text{si } v \geq 0 \end{cases}$$

continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Ainsi la variable  $V$  est à densité donnée par

$$f_V : v \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } v \leq 0 \\ e^{-v} & \text{si } v > 0 \end{cases}$$

La variable  $V$  suit donc la loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 48 / 86

Exercice 13 Q 2

### Exercice 13

Question 2

Puisque les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, les variables  $U$  et  $V$  le sont aussi. Leurs densités étant par ailleurs bornées, la variable  $S = U + V$  est à densité donnée par

$$f_S = f_U * f_V : s \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(s-t) dt.$$

Or  $f_U(t) f_V(s-t) \neq 0$  implique  $t \in ]-\infty, 0] \cap ]-\infty, s]$ . On a donc pour  $s \leq 0$  :

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^s e^t e^{-(s-t)} dt = e^{-s} \int_{-\infty}^s e^{2t} dt = \frac{e^{-s}}{2}$$

et pour  $s > 0$  :

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-(s-t)} dt + \int_0^s e^t e^{-(s-t)} dt = \frac{e^{-s}}{2}.$$

Bref,  $S$  a pour densité la fonction

$$f_S : s \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-s}/2 & \text{si } s < 0 \\ e^{-s}/2 & \text{si } s \geq 0 \end{cases}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 49 / 86

Exercice 13 Q 2

La fonction de répartition  $F_S$  de  $S$  s'obtient à partir de  $f_S$  par la formule

$$\forall s \in \mathbb{R}, F_S(s) = \int_{-\infty}^s f_S(t) dt.$$

Si  $s \leq 0$ , on obtient

$$F_S(s) = \int_{-\infty}^s f_S(t) dt = \int_{-\infty}^s \frac{e^t}{2} dt = \frac{e^s}{2}$$

alors que si  $s > 0$ ,

$$F_S(s) = \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{2} dt + \int_0^s \frac{e^{-t}}{2} dt = 1 - \frac{e^{-s}}{2}.$$

La fonction de répartition de  $S$  est donc donnée par :

$$F_S : s \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^s/2 & \text{si } s \leq 0 \\ 1 - e^{-s}/2 & \text{si } s > 0 \end{cases}.$$

Cette loi s'appelle la loi de Laplace de paramètre 1.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 50 / 86

Exercice 13 Q 3.a

### Exercice 13

Question 3.a

On a :

$$Q = \frac{X}{Y} = \frac{re^U}{re^{-V}} = e^{U+V} = e^S.$$

Ainsi  $Q$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Par suite,  $\mathbb{P}(Q \leq q) = 0$  pour  $q \leq 0$ . Pour  $q > 0$ , on a  $\mathbb{P}(Q \leq q) = \mathbb{P}(S \leq \ln q) = F_S(\ln q)$ . D'où la fonction de répartition de  $Q$  :

$$F_Q : q \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } q \leq 0 \\ \frac{q}{2} & \text{si } 0 < q \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2q} & \text{si } q > 1 \end{cases}.$$

Cette fonction étant continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0 et en 1) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , la variable  $Q$  est à densité donnée par :

$$f_Q : q \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < q \leq 1 \\ \frac{1}{2q^2} & \text{si } q > 1 \end{cases}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 51 / 86

Exercice 13 Q 3.b

### Exercice 13

Question 3.b

La variable aléatoire  $Q$  admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Q(t) dt$  converge. Or

$$\forall q \geq 1, q f_Q(q) = \frac{1}{2q}$$

si bien que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} t f_Q(t) dt$  diverge comme intégrale de Riemann. La variable  $Q$  n'admet donc pas d'espérance.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 52 / 86

Exercice 16 Q 1

### Exercice 16

Question 1

Puisque  $X$  est à valeurs positives, la fonction de répartition  $F$  de  $X$  vérifie :

$$\forall x < 0, F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0.$$

En tout point  $x \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $f(x) = F'(x)$ , donc pour tout  $x < 0$  sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de  $x$ , on a de ce fait  $f(x) = 0$ . **Si l'on suppose de plus  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+^*$** , on en déduit que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 53 / 86

Exercice 16 Q 2

### Exercice 16

Question 2

La variable  $Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(n \leq X < n+1) = \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 54 / 86

Exercice 16 Q 3

### Exercice 16

Question 3

La variable  $Y$  admet une espérance si, et seulement si, la série  $\sum n \mathbb{P}(Y = n)$  converge (absolument). Cela signifie que la suite de ses sommes partielles, de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(Y = k), \quad n \in \mathbb{N},$$

converge ou encore, puisque la série est à termes positifs, que la suite  $(S_n)$  est majorée.

De même, la variable  $X$  admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$  converge. Cela revient à ce que la fonction

$$G : x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$$

admette une limite finie en  $+\infty$  ou encore, par positivité de la fonction  $g : t \mapsto t f(t)$ , que la fonction  $G$  soit majorée.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 55 / 86

Exercice 16 Q 3

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a par positivité de  $f$  :

$$k \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} t f(t) dt \leq (k+1) \int_k^{k+1} f(t) dt$$

c'est-à-dire, d'après la question 2.,

$$k \mathbb{P}(Y = k) \leq \int_k^{k+1} t f(t) dt \leq (k+1) \mathbb{P}(Y = k).$$

En sommant ces inégalités, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(Y = k) \leq \int_0^{n+1} t f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n (k+1) \mathbb{P}(Y = k)$$

d'où (la série de droite étant convergente) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq G(n+1) \leq S_n + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = S_n + 1. \quad (*)$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 56 / 86

- Si  $X$  admet une espérance, la fonction  $G$  est alors majorée et il en va donc de même de la suite  $(S_n)$  d'après les inégalités  $(*)$ , ce qui signifie que  $Y$  admet une espérance.
- Si  $Y$  admet une espérance, alors  $(S_n)$  est majorée d'où, en notant  $M$  un majorant, toujours d'après  $(*)$  et par croissance de  $G$  :

$$\forall x \geq 0, \quad G(x) \leq G(|x| + 1) \leq S_{|x|} + 1 \leq M + 1.$$

Ainsi la fonction  $G$  est majorée et  $X$  admet une espérance.

Ainsi  $X$  admet une espérance si, et seulement si,  $Y$  admet une espérance et dans ces conditions, en passant à la limite ( $n \rightarrow \infty$ ) dans  $(*)$ , il vient :

$$E(Y) \leq E(X) \leq E(Y) + 1.$$

*Remarque.* La question 3. peut être traitée beaucoup plus rapidement. Des inégalités  $0 \leq Y \leq X < Y + 1$  et du théorème d'existence d'espérance par domination, on déduit que  $X$  admet une espérance si, et seulement si,  $Y$  admet une espérance et alors, par croissance de l'espérance,  $E(Y) \leq E(X) \leq E(Y) + 1$ .

### Exercice 16

#### Question 4.a

La variable  $X$ , qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , a pour densité

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

D'après la question 2., la loi de  $Y$  est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda n}.$$

Puisque  $X$  admet une espérance, il en va de même de  $Y$  d'après 3.. Plus précisément,

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{P}(Y = n) = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} n (e^{-\lambda})^{n-1} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

par sommation d'une série géométrique dérivée de raison  $q = e^{-\lambda}$  telle que  $|q| < 1$ .

### Exercice 16

#### Question 4.b

De l'inégalité  $\lfloor X \rfloor \leq X < \lfloor X \rfloor + 1$ , on déduit que  $0 \leq Z < 1$  et donc que  $\mathbb{P}(Z \leq z) = 0$  pour  $z < 0$  alors que  $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1$  pour  $z \geq 1$ . Pour  $0 \leq z < 1$ , l'utilisation du système complet associé à  $\lfloor X \rfloor$  permet d'écrire :

$$\{Z \leq z\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n \leq X \leq n + z]$$

d'où, puisque l'union est disjointe,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(n \leq X \leq n + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+z} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= (1 - e^{-\lambda z}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} = \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}. \end{aligned}$$

Ainsi  $Z$  a pour fonction de répartition

$$F : z \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 1 & \text{si } z \geq 1 \end{cases}.$$

Cette fonction étant continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0 et 1) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , la variable  $Z$  est à densité donnée par

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La variable  $Z$ , (presque sûrement) bornée, admet alors une espérance que l'on peut calculer par une intégration par parties :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^1 \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

ou par linéarité de l'espérance puisque  $X$  et  $Y$  admettent chacune une espérance :

$$E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

et ce bien que  $X$  soit à densité et  $Y$  discrète.

### Exercice 17

#### Question 1.a

Les variables  $X$  et  $Y$  ont pour densité commune

$$f_X = f_Y : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On montre sans difficulté (cela a été établi dans la question 2.b. de l'exercice 11 et ce sera une conséquence de théorèmes opératoires sur les lois uniformes qui seront développés dans le chapitre sur les lois à densité usuelles) que la variable  $-Y$  suit la loi uniforme sur  $[-1, 0]$  : elle admet pour densité

$$f_{-Y} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ces densités étant bornées et les variables  $X$  et  $-Y$  indépendantes (car  $X$  et  $Y$  le sont), leur somme  $X - Y$  est à densité donnée par le produit de convolution

$$f_X * f_{-Y} : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x - t) dt.$$

Pour mener ce calcul, on remarque que  $f_X(t) f_{-Y}(x - t) \neq 0$  équivaut à  $0 \leq t \leq 1$  et  $-1 \leq x - t \leq 0$  c'est-à-dire à  $t \in [0, 1] \cap [x, x + 1]$ . On est donc conduit à distinguer trois cas pour le calcul de l'intégrale  $f_X * f_{-Y}(x)$  :

- si  $x < -1$  ou  $x > 1$  alors  $[0, 1] \cap [x, x + 1] = \emptyset$  donc  $f_X * f_{-Y}(x) = 0$ ;
- si  $-1 \leq x \leq 0$ , alors  $[0, 1] \cap [x, x + 1] = [0, x + 1]$  et donc

$$f_X * f_{-Y}(x) = \int_0^{x+1} dt = x + 1;$$

- si  $0 \leq x \leq 1$ , alors  $[0, 1] \cap [x, x + 1] = [x, 1]$  et donc

$$f_X * f_{-Y}(x) = \int_x^1 dt = 1 - x.$$

En conclusion, la variable aléatoire  $X - Y$  est à densité donnée par :

$$f_{X-Y} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

### Exercice 17

#### Question 1.b

On détermine la fonction de répartition de la variable  $U$ . Celle-ci étant à valeurs positives, on a tout d'abord  $\mathbb{P}(U \leq u) = 0$  si  $u < 0$ . Puis, pour  $u \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(|X - Y| \leq u) = \mathbb{P}(-u \leq X - Y \leq u) = \int_{-u}^u f_{X-Y}(t) dt.$$

On est ici encore amené à distinguer deux cas :

- si  $0 \leq u \leq 1$ , alors  $[-u, u] \subset [-1, 1]$  donc :

$$\mathbb{P}(U \leq u) = \int_{-u}^0 (1 + t) dt + \int_0^u (1 - t) dt = 2u - u^2;$$

- si  $u > 1$ ,

$$\mathbb{P}(U \leq u) = \int_{-1}^0 (1 + t) dt + \int_0^1 (1 - t) dt = 1.$$



Exercice 17 Q 1.b

Ainsi  $U$  admet pour fonction de répartition

$$F_U : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 2u - u^2 & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases} .$$

Celle-ci est continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0 et 1) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . La variable aléatoire  $U$  est donc à densité donnée par :

$$f_U : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 2(1-u) & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 65 / 86

Exercice 17 Q 2

### Exercice 17

Question 2

À partir du moment où la première personne parmi  $A$  et  $B$  sort, la seconde reste au guichet un temps égal à  $|X - Y|$ . L'événement  $E$  : «  $C$  est la dernière personne à sortir » est donc réalisé si, et seulement si,  $|X - Y| \leq Z$ . On en déduit bien que  $E = [U - Z \leq 0]$ .

Pour déterminer la probabilité de cet événement, on cherche la loi de la variable aléatoire  $U - Z$ . Tout d'abord, les variables  $Y$  et  $Z$  étant de mêmes lois, la loi de  $-Z$  est la même que celle de  $-Y$  déterminée en 1.a.. Par ailleurs, les variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  étant mutuellement indépendantes par hypothèse, les variables  $U = \varphi(X, Y)$  et  $-Z = \psi(Z)$  sont indépendantes d'après le cours.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 66 / 86

Exercice 17 Q 2

On obtient alors, en raisonnant comme en 1.a. (les supports des densités étant les mêmes), que la variable  $U - Z$  est à densité donnée par  $f_{U-Z} = f_U * f_{-Z}$  avec (seule l'expression de cette densité sur  $\mathbb{R}_-$  est utile pour la suite) :

- si  $x < -1$ , alors  $f_{U-Z}(x) = 0$ ;
- si  $-1 \leq x \leq 0$ , alors

$$f_{U-Z}(x) = \int_{-1}^x (2-2t) dt = 1 - x^2.$$

D'où la probabilité de l'événement  $E$  :

$$P(E) = P(U - Z \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f_{U-Z}(t) dt = \int_{-1}^0 (1 - t^2) dt = \frac{2}{3}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 67 / 86

Exercice 17 Q 3

### Exercice 17

Question 3

Les variables  $X$  et  $Y$  étant indépendantes et de même loi on a, pour tout  $v \in \mathbb{R}$  :

$$P(V \leq v) = 1 - P(\min(X, Y) > v) = 1 - P(X > v, Y > v) = 1 - P(X > v)P(Y > v) = 1 - (1 - F_X(v))^2.$$

Ainsi la variable  $V$  admet pour fonction de répartition

$$F_V : v \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 2v - v^2 & \text{si } 0 \leq v \leq 1 \\ 1 & \text{si } v > 1 \end{cases} .$$

On constate que  $U$  et  $V$  ont des fonctions de répartition identiques. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que  $U$  et  $V$  ont même loi.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 68 / 86

Exercice 17 Q 4.a

### Exercice 17

Question 4.a

Le temps passé par  $C$  à la poste est  $T = V + Z$ . Par un argument similaire à celui utilisé en 2., on justifie que  $T$  est une variable à densité donnée par

$$f_T = f_V * f_Z : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(v)f_Z(t-v) dv$$

où  $f_V = f_U$  puisque  $U$  et  $V$  suivent la même loi d'après 3.. Pour que  $f_V(v)f_Z(t-v) \neq 0$ , il faut que  $0 \leq v \leq 1$  et  $0 \leq t - v \leq 1$  c'est-à-dire que  $v \in [0, 1] \cap [t-1, t]$ , ce qui conduit à distinguer trois cas :

- si  $t < 0$  ou  $t > 2$ , alors  $[0, 1] \cap [t-1, t] = \emptyset$  et  $f_T(t) = 0$ ;
- si  $0 \leq t \leq 1$ , alors  $[0, 1] \cap [t-1, t] = [0, t]$  et

$$f_T(t) = \int_0^t 2(1-v) dv = 2t - t^2;$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 69 / 86

Exercice 17 Q 4.a

- si  $1 \leq t \leq 2$ , alors  $[0, 1] \cap [t-1, t] = [t-1, 1]$  et

$$f_T(t) = \int_{t-1}^1 2(1-v) dv = t^2 - 4t + 4.$$

En conclusion,  $T$  a pour densité la fonction

$$f_T : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 2t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 - 4t + 4 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 70 / 86

Exercice 17 Q 4.b

### Exercice 17

Question 4.b

Le temps moyen passé par  $C$  à la poste est donné par l'espérance de  $T$ , qui existe puisque  $T$  est presque sûrement bornée (à valeurs dans  $[0, 2]$ ). Le calcul donne :

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_0^1 t(2t - t^2) dt + \int_1^2 t(t^2 - 4t + 4) dt = \frac{5}{6}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 71 / 86

Exercice 18 Q 1

### Exercice 18

Question 1

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Le résultat s'obtient par intégration par parties sur le segment  $[0, x]$ , en dérivant  $t \mapsto 1 - F(t)$  en  $-f$  et en primitivant  $t \mapsto 1$  en  $t \mapsto t$  :

$$\int_0^x (1 - F(t)) dt = [t(1 - F(t))]_0^x + \int_0^x t f(t) dt = x(1 - F(x)) + \varphi(x).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 72 / 86

Exercice 18 Q 2

### Exercice 18

Question 2

Si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$  converge alors, puisque  $F \leq 1$  :

$$\int_0^x tf(t) dt = \varphi(x) \leq \int_0^x (1 - F(t)) dt \leq \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt.$$

Ainsi les intégrales partielles de l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$  sont majorées et, comme la fonction  $t \mapsto tf(t)$  est positive, cela entraîne la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ , i.e. l'existence de l'espérance de  $X$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 73 / 86

Exercice 18 Q 2

Réciproquement, si  $X$  admet une espérance, alors

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq x(1 - F(x)) = x \int_x^{+\infty} f(t) dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

comme queue d'une intégrale convergente. On en déduit par encadrement que  $x(1 - F(x))$  tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .  
Il résulte alors de la formule obtenue en 1. que

$$\int_0^x (1 - F(t)) dt = x(1 - F(x)) + \int_0^x tf(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} tf(t) dt = \mathbb{E}(X).$$

D'où la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt$  avec la formule :

$$\int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt = \mathbb{E}(X).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 74 / 86

Exercice 18 Q 3.a

### Exercice 18

Question 3.a

Par indépendance des variables  $X_1, \dots, X_n$ , il vient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(M_n \leq x) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x) \end{aligned}$$

et  $M_n$  admet donc pour fonction de répartition

$$F_{M_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto F_{X_i}(x)^n = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette fonction de répartition étant continue sur  $\mathbb{R}$  (même en 0) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ , la variable  $M_n$  est à densité.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 75 / 86

Exercice 18 Q 3.b

### Exercice 18

Question 3.b

Il vient, d'après la formule du binôme :

$$\forall x \geq 0, \quad 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} e^{-\lambda kx}$$

si bien que l'intégrale ci-dessous converge comme somme d'intégrales convergentes, et  $M_n$  admet donc pour espérance d'après 2. :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n) &= \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda kt} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 76 / 86

Exercice 18 Q 3.b

*Remarque.* On peut aussi écrire, en factorisant  $a^n - b^n$  :

$$\forall x \geq 0, \quad 1 - F(x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - e^{-\lambda x})^k$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n) &= \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{(1 - e^{-\lambda t})^{k+1}}{(k+1)\lambda} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 77 / 86

Exercice 19

### Exercice 19

On peut noter pour commencer que la densité  $f$  étant supposée continue sur  $\mathbb{R}_+$ , la fonction de répartition  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . En effet, le cours assure que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du = \int_{-\infty}^{-1} f(u) du + \int_{-1}^t f(u) du$$

si bien, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral appliqué à  $f$  continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$ , que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $F'(t) = f(t)$  pour tout  $t > 0$ .  
Il convient également de faire remarquer que, puisque la variable aléatoire  $X$  est à densité, on a  $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X < t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Plus généralement, on pourra considérer les probabilités d'événements construits à partir d'encadrements sur  $X$ , sans se soucier de savoir si les inégalités sont strictes ou larges.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 78 / 86

Exercice 19 Q 1.a

### Exercice 19

Question 1.a

Soient  $t, h \in \mathbb{R}_+^*$ . On peut noter pour commencer qu'il est possible de conditionner par l'événement  $[X > t]$  puisque celui-ci est de probabilité non nulle. En effet, puisque  $F'(x) = f(x) > 0$  pour tout  $x > 0$  par hypothèse, la fonction  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ayant pour limite 1 en  $+\infty$ , on a donc  $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ .  
Dans ces conditions, la probabilité  $p(t, h)$  que le composant tombe en panne avant l'instant  $t + h$  sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant  $t$  est la probabilité conditionnelle

$$p(t, h) = \mathbb{P}_{[X > t]}(X \leq t + h) = \frac{\mathbb{P}(t < X \leq t + h)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{F(t + h) - F(t)}{1 - F(t)}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 79 / 86

Exercice 19 Q 1.b

### Exercice 19

Question 1.b

Puisque  $F$  est dérivable en  $t$  d'après la remarque préliminaire, avec  $F'(t) = f(t) > 0$ , on a

$$F(t + h) = F(t) + hf(t) + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

d'où, d'après a.,

$$p(t, h) = \frac{hf(t) + o(h)}{1 - F(t)} \sim \frac{hf(t)}{1 - F(t)}, \quad h \rightarrow 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 80 / 86

Exercice 19 Q 2.a

### Exercice 19

Question 2.a

Pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$  donné, la fonction  $\lambda_X$  est continue sur le segment  $[0, t]$ . De plus,  $F' = f$  sur  $]0, t[$  d'après la remarque préliminaire, d'où :

$$\int_0^t \lambda_X(u) du = \int_{\rightarrow 0}^t \frac{F'(u)}{1-F(u)} du = [-\ln|1-F(u)|]_{\rightarrow 0}^t = -\ln(1-F(t))$$

puisque  $1-F(t) > 0$  comme on l'a déjà fait remarqué en 1.a. et

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = F(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(u) du = 0$$

étant donné que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$ .  
Par suite,

$$\forall t > 0, \quad F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_X(u) du\right).$$

Comme par ailleurs  $F(t) = 0$  pour tout  $t \leq 0$  étant donné que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$ , le taux de panne de  $X$  détermine ainsi la fonction de répartition de  $X$  et donc sa loi.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 81 / 86

Exercice 19 Q 2.b

### Exercice 19

Question 2.b

Si  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ , elle a pour densité

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \alpha e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases},$$

qui est bien nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$ , strictement positive en tout point de  $\mathbb{R}_+^*$  et continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Sa fonction de répartition est donnée par

$$F : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et le taux de panne est constant :

$$\forall t > 0, \quad \lambda_X(t) = \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{1 - (1 - e^{-\alpha t})} = \alpha.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 82 / 86

Exercice 19 Q 2.b

### Exercice 19

Question 3.a

Réciproquement, si le taux de panne est constant égal à  $\alpha$ , alors d'après a. :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp\left(-\int_0^t \alpha du\right) = 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et l'on reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ , qui est donc la loi de  $X$ .

*Remarque.* Il n'est en fait pas nécessaire de détailler les calculs à ce point pour la réciproque. En effet, si le taux de panne est constant égal à  $\alpha$ , alors d'après le premier point, le taux de panne est celui d'une loi exponentielle de paramètre  $\alpha$  et, comme le taux de panne caractérise la loi comme on l'a vu en a., cela suffit pour conclure que  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 83 / 86

Exercice 19 Q 3.a

### Exercice 19

Question 3.a

L'appareil survit plus d'un an si, et seulement si, l'événement  $[X \geq 1]$  est réalisé. Sa probabilité se calcule à l'aide de la fonction de répartition de  $X$ , qui est déterminée d'après le taux de panne d'après la question a. :

$$\forall t > 0, \quad F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_X(u) du\right) = 1 - \exp\left(-\int_0^t u^3 du\right) = 1 - e^{-t^4/4}.$$

La probabilité recherchée est donc

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - F(1) = e^{-1/4}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 84 / 86

Exercice 19 Q 3.b

### Exercice 19

Question 3.b

Il s'agit de calculer :

$$\mathbb{P}_{[X \geq 1]}(X \geq 3) = \frac{\mathbb{P}(X \geq 1, X \geq 3)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq 3)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} = \frac{1 - F(3)}{1 - F(1)} = e^{-20},$$

car  $[X \geq 3] \subset [X \geq 1]$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 85 / 86

Exercice 20 Q 1

### Exercice 20

Question 1

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 86 / 86