Diagonalisation

Feuille d'exercices

$\boxed{1}$ ✎ Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la matrice carrée

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a_n et b_n que l'on déterminera tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$.
2. Retrouver le résultat de la question **1.** en utilisant un polynôme annulateur de degré 2 de M.
3. Retrouver le résultat de la question **1.** en diagonalisant M.
4. Retrouver le résultat de la question **1.** en développant $\big((M + I_3) - I_3\big)^n$.

$\boxed{2}$ ✎ Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Diagonaliser A.
2. En déduire l'anticommutant de A, i.e. l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM + MA = 0$.

$\boxed{3}$ ★ Soit

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer deux matrices D diagonale et P inversible de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. Calculer P^{-1}.
   b. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On définit trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par leurs termes initiaux $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$ ainsi que les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n + 3y_n + \frac{3}{2}z_n - 3 \\ y_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 2y_n + \frac{3}{2}z_n - 1 \\ z_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 3y_n + \frac{1}{2}z_n - 3 \end{cases}.$$

   On pose $B = {}^t\begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = {}^t\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   a. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre X_n, X_{n+1}, A et B.
   b. Justifier que la matrice $I_3 - A$ est inversible.
   c. En déduire un vecteur $U \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = AU + B$.
   d. En s'inspirant de la méthode usuelle d'étude des suites arithmético-géométriques, exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{4}$ ★ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle donnée par les conditions initiales $x_0 = 2$, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n.$$

On pose $X_n = {}^t\begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **a.** Trouver une matrice $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. Déterminer deux matrices D diagonale et P inversible de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
2. On pose $Y_n = P^{-1}X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. En déduire une expression de Y_n puis de X_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer x_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{5}$ ✎ Montrer qu'une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et sa transposée ont mêmes valeurs propres.

$\boxed{6}$ ★♣ Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note

$$D'(\omega, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \omega| \leqslant r\}$$

le disque fermé du plan complexe centré en ω et de rayon r.

1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose
$$r_i = \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,.$$
   Montrer que :
$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D'(a_{i,i}, r_i)$$
   (les disques $D'(a_{i,i}, r_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont appelés disques de Geršgorin de A).
2. On suppose que A est à diagonale strictement dominante, i.e. que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,.$$
   Montrer que A est inversible.
3. On suppose que A est une matrice stochastique, i.e. à coefficients réels positifs telle que
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$
   a. Montrer que 1 est valeur propre de A.
   b. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.
   c. Montrer que si les coefficients diagonaux $a_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont strictement positifs alors les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1 à l'exception de 1.

✎ : application ♣ : difficile ★ : classique

7 ✎ Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni des lois usuelles et Δ l'endomorphisme de E qui, à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associe la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer les éléments propres de Δ.

8 Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $v \circ u - u \circ v = u$. Montrer que $v \circ u^k - u^k \circ v = ku^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que u est nilpotent.

9 ✎ Soit u un endomorphisme nilpotent. Déterminer les valeurs propres de u.

10 ✎ Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et λ un scalaire. Montrer que λ^2 est valeur propre de u^2 si, et seulement si, λ ou $-\lambda$ est valeur propre de u.

11 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang 1.
Montrer que l'un au moins des endomorphismes $f - \mathrm{id}$ et $f + \mathrm{id}$ est inversible.

12 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.
Montrer que les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ ont mêmes valeurs propres.

13 ✎ Dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les éléments $f_k : x \longmapsto x^k \mathbf{e}^{-x}$, $0 \leqslant k \leqslant 3$. On note F le sous-espace de E engendré par les vecteurs f_0, f_1, f_2 et f_3.

1. Justifier que $\mathscr{F} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une base de F.
2. Montrer que l'application $u : f \longmapsto f' - f''$ est un endomorphisme de F.
3. L'endomorphisme u est-il inversible ? diagonalisable ?

14 Pour $n \geqslant 1$ donné, on considère l'application

$$\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit P un vecteur propre de φ. Monter que P ne peut avoir d'autres racines complexes que 1 et -1. En déduire les valeurs propres de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

15 ✎ Soit $n \geqslant 2$ entier.

1. On note tr l'application qui à toute matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace $\operatorname{tr} M$, i.e. la somme de ses coefficients diagonaux.
   - **a.** Vérifier qu'il s'agit d'une application linéaire et que $\operatorname{Im} \operatorname{tr} = \mathbb{R}$.
   - **b.** En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.
   - **c.** Établir que $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $f : M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M + (\operatorname{tr} M)I_n$.
   - **a.** Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
   - **b.** Déterminer les éléments propres de f.
   - **c.** En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
3. On choisit une matrice $J \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\operatorname{tr} J = 0$ et l'on considère l'endomorphisme $g : M \longmapsto M + (\operatorname{tr} M)J$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
   - **a.** Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de g.
   - **b.** Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
   - **c.** L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

16 ✎ Soient $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires. On note A et B les matrices représentatives de f et g en bases canoniques.

1. Préciser la taille des matrices A, B, AB et BA.
2. Justifier que $g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui n'est ni injectif ni surjectif. En déduire une valeur propre pour BA.
3. On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Montrer que si $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \neq 0$, alors $BX \neq 0$.
   - **b.** En déduire que toute valeur propre de AB est aussi valeur propre de BA.
   - **c.** Justifier que BA est diagonalisable.

17 ✎ Soit E un espace vectoriel complexe de dimension 4 rapporté à une base $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère l'endomorphisme f de E représenté en base $\underline{e}$ par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer le rang de f ainsi qu'une base de l'image et du noyau de f.
2. Déterminer les éléments propres de f.
3. Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ pour lesquelles la matrice M est diagonalisable et diagonaliser M le cas échéant.

18 ★ Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on considère deux matrices $L \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles. On pose $A = CL$ et $a = LC$.

1. Calculer A^2 en fonction de a et A. Qu'en déduit-on concernant les valeurs propres de A ?
2. Montrer que $\operatorname{rg} A = 1$.
3. Déterminer les valeurs propres de A.
4. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $A^2 \neq 0$.

19 ♣ Soit f un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.
Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{tr} f \neq 0$.

Remarque. On rappelle que $\operatorname{tr} f$ est par définition la trace commune à toutes les matrices représentatives de f.

20 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de u, alors $E_\lambda(u) \subset \operatorname{Im} u$.
2. En déduire que si u est diagonalisable, alors $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires dans E.

21 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont -1 et 1 sont valeurs propres. Montrer que f est diagonalisable.

22 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^3 - 3u^2 + 2u = 0$. Montrer que u est diagonalisable.

23 ♣ Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

1. **a.** Pour $u, v \in \mathbf{L}(E)$, montrer que $\dim \operatorname{Ker}(u \circ v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Ker} v)$.
   b. Montrer plus généralement que pour $u_1, \dots, u_r \in \mathbf{L}(E)$,
$$\dim \operatorname{Ker}(u_1 \circ \cdots \circ u_r) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim(\operatorname{Ker} u_j).$$
2. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
3. En déduire que si u est diagonalisable et stabilise un sous-espace vectoriel F, alors il induit sur celui-ci un endomorphisme diagonalisable.

24 ♣ Soient $n \geqslant 2$ et $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables.

1. La somme $S = A + B$ est-elle diagonalisable ?
2. On fait l'hypothèse $AB = BA$. Montrer que $S = A + B$ est diagonalisable.
   Indication. On pourra introduire les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et B et utiliser le résultat démontré dans la question **3.** de l'exercice 23.

25 ★

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme diagonalisable de E. Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. On suppose que v est un endomorphisme de E tel que $v^2 = u$.
   a. On suppose dans cette question que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de u respectivement associées aux vecteurs propres $e_1, \dots, e_n$ sont deux-à-deux distinctes. Montrer que u et v commutent et en dédire que chaque vecteur e_i est propre pour v. En déduire que v est diagonalisable.
   b. Sans hypothèse sur les valeurs propres de u, l'endomorphisme v est-il diagonalisable ?
2. *Application.* Résoudre l'équation
$$X^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$
   d'inconnue $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

26 ♣

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n rapporté à une base $\underline{e}$. Soient f un endomorphisme de E et H un hyperplan d'équation $\varphi(x) = 0$ où φ est une forme linéaire non nulle de E.
   a. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, $\varphi \circ f$ est colinéaire à φ.
   b. Soient A et L les matrices représentant respectivement en base $\underline{e}$ les applications linéaires f et φ.
   Montrer que l'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, ${}^t\mathrm{L}$ est vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}$.
2. En déduire les sous-espaces stables par l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

27 ★ Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. **a.** Montrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})^2$ et $\operatorname{Ker}(u + \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   b. Déterminer une base $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u est représenté par la matrice
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. Calculer B^n et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

28 ★ Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$\mathrm{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pose $\mathbb{1} = \mathrm{M}(1,1)$.

1. **a.** Déterminer $\operatorname{rg} \mathbb{1}$ et en déduire les valeurs propres de $\mathbb{1}$. Déterminer une base de chacun de ses sous-espaces propres.
   b. En déduire les valeurs propres de $\mathrm{M}(a,b)$.
2. Justifier que la matrice $\mathrm{M}(a,b)$ est diagonalisable.

29 ★ Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^n$ défini par $f(e_i) = e_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $f(e_n) = e_1$.

1. **a.** Déterminer la matrice J représentative de f en base canonique.
   b. Déterminer les valeurs propres de J.
   c. Justifier que J est diagonalisable.
2. Pour $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, on considère la *matrice circulante*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

   a. Exprimer A comme polynôme en J.
   b. En déduire que A est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

30 ★ À un polynôme unitaire $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} - \cdots - a_0 \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ donné, on associe sa *matrice compagne* $\mathrm{C_P} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathrm{C_P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{C_P}$ sont les racines de P.
2. Justifier que la matrice $\mathrm{C_P}$ est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme P est scindé à racines simples.

Programmation :
- Classe : 5, 7, (8), 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 25, 27, 28, (30)
- TD : 1, 2, 3, 4
- TD* : 6, 23, 24, 26

Indications

2 **2.** Pour $P \in \mathbf{Gl}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

exprimer la condition $AM + MA = 0$ sur $N = P^{-1}MP$. Pour étudier cette nouvelle condition, on pourra décomposer N par blocs selon le même schéma que D (afin de simplifier les calculs) :

$$N = \begin{pmatrix} X & C \\ L & y \end{pmatrix}.$$

6 **1.** Pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, considérer $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i|$ soit maximal et montrer qu'alors $|\lambda - a_{i,i}| \leqslant r_i$.

2. Est-ce que 0 est valeur propre de A ?

3. **b.** Montrer que tous les disques de Geršgorin de A sont inclus dans le disque fermé centré à l'origine et de rayon 1.

c. Justifier que chaque disque de Geršgorin de A ne rencontre le cercle unité qu'au point 1.

7 Étant donnée une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et un scalaire λ, reformuler la condition $\Delta(u) = \lambda u$.

8 Interpréter la relation $v \circ u^k - u^k \circ v = ku^k$ en termes d'éléments propres d'un endomorphisme bien choisi.

10 Raisonner en termes de bijectivité.

13 **3.** Représenter matriciellement u dans la base $\mathscr{F}$.

14 **2.** Si a est racine de P d'ordre m, on peut simplifier l'équation $\varphi(P) = \lambda P$ par $(X - a)^{m-1}$. À quelle condition sur λ existe-t-il $\alpha, \beta \in [\![0, n]\!]$ tels que $P = (X-1)^\alpha (X+1)^\beta$ soit solution de l'équation précédente ?

16 **2.** Considérer le rang de $g \circ f$.

3. **a.** Calculer ABX.

17 **2.** Les vecteurs propres de f associés à des valeurs propres non nulles sont à rechercher dans $\operatorname{Im} f$.

22 Déduire de la relation $u \circ (u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 2\,\mathrm{id}_E) = 0$ que les sous-espaces propres $E_0(u)$, $E_1(u)$ et $E_2(u)$ sont supplémentaires dans E.

23 **1.** **a.** Appliquer le théorème du rang à la restriction de v à $\mathrm{Ker}(u \circ v)$.

2. Si P scindé à racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ simples annule u, montrer que les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont supplémentaires dans E. Pour la réciproque, on pourra commencer par chercher un polynôme annulateur d'une matrice diagonale.

3. Observer que si un polynôme P annule u, alors il annule tout endomorphisme induit par u.

24 **2.** Considérer les endomorphismes induit par v sur les sous-espaces propres de u.

25 **1.** **a.** Observer que les sous-espaces propres de u sont des droites.