

Travaux dirigés

Intégrales généralisées

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

Exercice 1

Question 1

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{\arctan x \ln x}{\sqrt{x} - \sin x}$$

est continue sur $]0, 1[$ car $\sin x \leq x < \sqrt{x}$ pour tout $x \in]0, 1[$ par concavité de \sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin 1 < 1$.

Lorsque $x \rightarrow 0$,

$$f(x) \sim \frac{x \ln x}{\sqrt{x} - x + o(x)} = \frac{x \ln x}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} \sim \frac{x \ln x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x \rightarrow 0,$$

si bien que f est prolongeable par continuité en 0. Son intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est donc faussement généralisée (donc convergente).

Exercice 1

Question 2

La fonction $f : x \mapsto e^{-(\ln x)^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Lorsque $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow 0$ si bien que f peut être prolongée par continuité en 0. L'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est donc convergente.

- Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, mais cela ne suffit pas pour que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge ! Plus précisément,

$$x^2 f(x) = \exp(2 \ln x - (\ln x)^2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

car

$$2 \ln x - (\ln x)^2 = o((\ln x)^2) - (\ln x)^2 \sim -(\ln x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Ainsi $0 \leq f(x) = o(\frac{1}{x^2})$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est donc convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

Exercice 1

Question 3

La fonction $f : x \mapsto (\ln x)e^{-x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Lorsque $x \rightarrow 0$, $f(x) \sim \ln x \leq 0$ si bien que $\int_0^1 f(t) dt$ converge par comparaison à l'intégrale convergente $\int_0^1 \ln t dt$.
- Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on remarque que

$$0 \leq f(x) = (x^2 (\ln x) e^{-x}) \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ou

$$0 \leq f(x) = ((\ln x) e^{-x/2}) e^{-x/2} = o(e^{-x/2})$$

et l'on conclut que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge par comparaison à l'une des intégrales convergentes $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ ou $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Exercice 1

Question 4

La fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- La fonction f est bornée au voisinage de 0 :

$$\forall x \in]0, 1], |f(x)| \leq 1$$

d'où l'on déduit la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale convergente $\int_0^1 dt$.

- Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$$

d'où l'on déduit la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

Exercice 1

Question 5

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}$$

est continue sur $]0, +\infty[$.

- Lorsque $x \rightarrow 0$,

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}} \geq 0$$

et $\int_0^1 f(t) dt$ est donc convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ ($\frac{1}{2} < 1$).

- Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln x + o(\ln x) \sim \ln x$$

de sorte que, pour $\alpha \geq 1$,

$$x^\alpha f(x) \sim \frac{\ln x}{x^{3/2-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } \alpha < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

En choisissant α tel que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$, par exemple $\alpha = \frac{4}{3}$, on a donc $0 \leq f(x) = o(\frac{1}{x^\alpha})$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, d'où l'on déduit que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, convergente puisque $\alpha > 1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

Exercice 1

Question 8

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}$$

est continue sur $]0, 1[$.

- Lorsque $x \rightarrow 0$,

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x^{2/3}} \geq 0,$$

d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{1/2} f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_0^1 \frac{dt}{t^{2/3}}$ ($\frac{2}{3} < 1$).

Exercice 1 Q 8

- Pour mener l'étude au voisinage de 1, on utilise le changement de variable affine $x = 1 - y$, c'est-à-dire

$$y = 1 - x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0,$$
 qui préserve la nature de l'intégrale (avec $dx = -dy$). On a alors

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-(1-y)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{y(2-y)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{y^{1/3}} \geq 0,$$
 et l'on obtient à nouveau la convergence de l'intégrale $\int_{1/2}^{1-1/2} f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{t^{1/3}}$.
 En conclusion, l'intégrale $\int_1^1 f(t) dt$ converge.

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 9 / 92

Exercice 1 Question 9

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x^2 - x)}{(1+x)^2}$$
 est continue sur $]1, +\infty[$ (car $x^2 > x$ pour $x > 1$).

- Pour mener l'étude au voisinage de 1, on pose $x = 1 + y$, c'est-à-dire

$$y = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$$
 On a alors

$$f(x) \sim \frac{\ln x + \ln(x-1)}{4} = \frac{\ln(1+y) + \ln y}{4} = \frac{o(\ln y) + \ln y}{4} \sim \frac{\ln y}{4} \leq 0,$$
 d'où l'on tire la convergence de l'intégrale $\int_1^2 f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale convergente $\int_0^1 \ln t dt$.

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 10 / 92

Exercice 1 Q 9

- Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = \frac{2 \ln x + \ln(1 - \frac{1}{x})}{(1+x)^2} = \frac{2 \ln x + o(\ln x)}{(1+x)^2} \sim \frac{2 \ln x}{x^2}.$$
 Par suite, étant donné $\alpha \geq 1$, on a :

$$x^\alpha f(x) \sim \frac{2 \ln x}{x^{2-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 2 \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 2 \end{cases}.$$
 Pour un choix de α tel que $1 < \alpha < 2$, par exemple $\alpha = \frac{3}{2}$, on a donc $0 \leq f(x) = o(\frac{1}{x^\alpha})$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, ce qui amène la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, convergente puisque $\alpha > 1$.
 En conclusion, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 11 / 92

Exercice 2 Question 1

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$
 est continue sur $]0, +\infty[$. On la primitive par décomposition en éléments simples :

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + k.$$
 Pour $k = 0$ en particulier, on obtient une primitive F admettant une limite finie en $+\infty$:

$$F(x) = \ln \frac{x+1}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$
 On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = [F(t)]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(0) = \ln 2.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 12 / 92

Exercice 2 Question 2

La fonction

$$f : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
 est continue sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Elle y admet pour primitive la fonction

$$F : x \mapsto -\ln|\cos x| = -\ln \cos x,$$
 qui n'admet pas de limite finie en $\frac{\pi}{2}$. Ainsi l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \tan t dt$ diverge.

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 13 / 92

Exercice 2 Question 3

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$$
 est continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle y admet pour primitive la fonction

$$F : x \mapsto -2\sqrt{\cos x},$$
 qui admet des limites finies en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) dt = [F(t)]_{t \rightarrow -\pi/2}^{t \rightarrow \pi/2} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\pi/2} F(x) = 0.$$
 Ce n'est pas surprenant (une fois la convergence de l'intégrale acquise) puisqu'on intègre une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine.

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 14 / 92

Exercice 2 Question 4

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$$
 est continue sur $]0, +\infty[$. On la primitive par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln|x+1| + k. \end{aligned}$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 15 / 92

Exercice 2 Q 4

Pour $k = 0$ en particulier, on obtient une primitive F admettant une limite finie en $+\infty$:

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}.$$
 On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = [F(t)]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(0) = \frac{\pi}{4}.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 16 / 92

Exercice 2 Q 7

Question 7

La fonction

$$f : x \mapsto 1 - x \arctan \frac{1}{x}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. On en détermine les primitives à l'aide d'une intégration par parties, en primitivant $x \mapsto x$ et en dérivant $x \mapsto \arctan(1/x)$:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= x - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= x - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \arctan x + k. \end{aligned}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 17 / 92

Exercice 2 Q 7

Pour $k = 0$ par exemple, on obtient une primitive F de f dont il s'agit d'étudier les limites en 0 et $+\infty$. On obtient sans peine

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0.$$

Pour la limite en $+\infty$, on utilise le développement limité $\arctan u = u + o(u^2)$, $u \rightarrow 0$:

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{1}{2} \arctan x = \frac{1}{2} \arctan x + o(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

d'où l'on déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 18 / 92

Exercice 2 Q 7

Puisque F admet des limites finies en 0 et $+\infty$, l'intégrale généralisée $\int_{\rightarrow 0}^{\rightarrow +\infty} f(t) dt$ converge et :

$$\int_{\rightarrow 0}^{\rightarrow +\infty} f(t) dt = [F(t)]_{\rightarrow 0}^{\rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \frac{\pi}{4}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 19 / 92

Exercice 2 Q 7

Remarque. Le développement de la fonction $\varphi = \arctan$ n'est pas explicitement au programme. Il n'est pas difficile de l'obtenir à l'ordre 2 : ce développement existe d'après la formule de Taylor-Young (appliquée à φ de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de 0) et, puisque φ est impaire, son coefficient de degré 2 est nul. Connaissant son premier terme (donné par l'équivalent classique de $\arctan x$ lorsque $x \rightarrow 0$), il vient :

$$\arctan u = u + o(u^2), \quad u \rightarrow 0.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 20 / 92

Exercice 2 Q 7

Remarque. Pour le déterminer à l'ordre 3 avec les outils au programme, on peut appliquer le théorème de Taylor-Young aux fonctions φ et φ' , respectivement de classe \mathcal{C}^3 et \mathcal{C}^2 au voisinage de 0 ; on obtient :

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \varphi'(0)u + \frac{\varphi''(0)}{2}u^2 + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}u^3 + o(u^3), \quad u \rightarrow 0$$

et

$$\varphi'(u) = \varphi'(0) + \varphi''(0)u + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{2}u^2 + o(u^2), \quad u \rightarrow 0.$$

En comparant ces développements, on s'aperçoit que celui de φ s'obtient « en primitivant » celui de φ' . Or

$$\varphi'(u) = \frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + o(u^2), \quad u \rightarrow 0$$

d'où le développement de φ à l'ordre 3 :

$$\varphi(u) = \varphi(0) + u - \frac{1}{3}u^3 + o(u^3), \quad u \rightarrow 0.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 21 / 92

Exercice 2 Q 8

Question 8

La fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}$$

est continue sur $[0, +\infty[$. On va étudier l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ grâce au changement de variable $u = \sqrt{1+e^t}$. Plus précisément, l'application $u \mapsto t = \ln(u^2 - 1)$, de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant de $[\sqrt{2}, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, si bien que les intégrales ci-dessous sont de même nature :

$$\int_0^{\rightarrow +\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} = \int_{\sqrt{2}}^{\rightarrow +\infty} \frac{1}{u} \frac{2u}{u^2-1} du = \int_{\sqrt{2}}^{\rightarrow +\infty} \frac{2 du}{u^2-1}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 22 / 92

Exercice 2 Q 8

On obtient une primitive de

$$g : u \in [\sqrt{2}, +\infty[\mapsto \frac{2}{u^2-1}$$

sur l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$ par l'intermédiaire d'une décomposition en éléments simples :

$$\int \frac{2 du}{u^2-1} = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \ln \frac{u-1}{u+1} + k.$$

Pour $k = 0$, on obtient une primitive G de g qui admet une limite finie en $+\infty$, d'où la convergence de l'intégrale et sa valeur :

$$\begin{aligned} \int_0^{\rightarrow +\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} &= \int_{\sqrt{2}}^{\rightarrow +\infty} g(u) du = [G(u)]_{\sqrt{2}}^{\rightarrow +\infty} = \lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) - G(\sqrt{2}) \\ &= -\ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 2 \ln(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 23 / 92

Exercice 2 Q 9

Question 9

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

est continue sur $[0, +\infty[$. L'équivalent $f(x) \sim \frac{1}{x^2} \geq 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ assure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

Pour calculer une primitive de f , on commence par mettre le dénominateur sous forme canonique :

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 24 / 92

Exercice 2 Q 9

On poursuit avec le changement de variable affine $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$\int f(x) dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan y + k = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k.$$

Pour $k = 0$ en particulier, on obtient une primitive F de f qui permet d'achever le calcul :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t) dt &= [F(t)]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(0) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 25 / 92

Exercice 2 Q 10

Exercice 2

Question 10

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

est continue sur l'intervalle $]1, 2[$. Tout comme en 9., on commence par mettre sous forme canonique le trinôme sous la racine :

$$\forall x \in]1, 2[, f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}.$$

On effectue ensuite le changement de variable $2t - 3 = \sin u$ dans l'intégrale $\int_{-1}^{+2} f(t) dt$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 26 / 92

Exercice 2 Q 10

Plus précisément, l'application $u \mapsto t = \frac{3+\sin u}{2}$ est de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]1, 2[$, si bien que les intégrales ci-dessous sont de même nature :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+2} f(t) dt &= \int_{-1}^{+2} \frac{2 dt}{\sqrt{1-(2t-3)^2}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} du \\ &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos u}{|\cos u|} du = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} du. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est trivialement convergente et son calcul est immédiat :

$$\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{(t-1)(2-t)}} = \pi.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 27 / 92

Exercice 3 Q 1.a

Exercice 3

Question 1.a

La fonction

$$f_\alpha : x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$$

est continue sur $[1, +\infty[$.

Si $\alpha > 1$, alors on peut utiliser la majoration

$$\forall x \geq 1, |f_\alpha(x)| = \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

pour obtenir, par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, convergente puisque $\alpha > 1$, la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 28 / 92

Exercice 3 Q 1.b

Exercice 3

Question 1.b

On obtient, par intégration par parties sur un segment $[1, x] \subset [1, +\infty[$,

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt = \left[\frac{-\cos t}{t^\alpha} \right]_1^x - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt. \quad (*)$$

Or, en raisonnant comme en a. avec $\alpha + 1 > 1$, on établit la convergence absolue donc la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$, d'où il ressort que l'intégrale partielle $\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On en déduit que l'intégrale partielle (*) admet également une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$, ce qui établit la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 29 / 92

Exercice 3 Q 1.b

Remarque. Par passage à la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ dans (*), on obtient donc la relation

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt = \left[\frac{-\cos t}{t^\alpha} \right]_1^{+\infty} - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Notons qu'on ne peut pas faire la même intégration par parties sur $]0, +\infty[$, car le crochet et l'intégrale au membre de droite divergent sur $]0, +\infty[$ (alors que l'intégrale de gauche converge puisque la fonction est prolongeable par continuité à l'origine). Cependant, en primitivant $t \mapsto \sin t$ en $t \mapsto 1 - \cos t$, on peut justifier que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t^\alpha} \right]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 30 / 92

Exercice 3 Q 1.b

Remarque. On peut montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$ n'est pas absolument convergente pour $0 < \alpha \leq 1$. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f_\alpha(t)| dt \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha}.$$

Puisque $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ est le terme général d'une série divergente étant donné que $\alpha \leq 1$, on en déduit que la série de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f_\alpha(t)| dt$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge. Dans ces conditions, ses sommes partielles

$$\sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f_\alpha(t)| dt = \int_\pi^{(n+1)\pi} |f_\alpha(t)| dt$$

n'ont pas de limite finie lorsque $n \rightarrow \infty$. Par contraposée du théorème de composition des limites, cela exclut l'existence d'une limite finie pour $\int_\pi^x |f_\alpha(t)| dt$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, si bien que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} |f_\alpha(t)| dt$ diverge.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 31 / 92

Exercice 3 Q 2

Exercice 3

Question 2

La fonction

$$g_\alpha : x \mapsto \ln \left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha} \right)$$

est continue sur $]0, +\infty[$ (on a $\frac{\sin x}{x^\alpha} \geq 0$ pour $x \in]0, 1]$ et $\frac{\sin x}{x^\alpha} \geq -\frac{1}{x^\alpha} > -1$ pour $x \in]1, +\infty[$). Pour $0 < \alpha \leq 1$, elle est prolongeable par continuité en 0 alors que pour $\alpha > 1$,

$$g_\alpha(x) = \ln \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} (1 + o(1)) \right) = (1-\alpha) \ln x + o(\ln x) \sim (1-\alpha) \ln x \geq 0.$$

Dans les deux cas, l'intégrale $\int_0^1 g_\alpha(t) dt$ converge.

Puisqu'un équivalent ne suffit pas (g_α ne garde pas un signe constant au voisinage de $+\infty$), un développement asymptotique donne, sachant que $\alpha > 0$:

$$g_\alpha(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 32 / 92

Exercice 3 Q 2

Compte-tenu de la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ établie en **1.b.**, l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_\alpha(t) dt$ est de même nature que

$$\int_1^{+\infty} \left(g_\alpha(t) - \frac{\sin t}{t^\alpha} \right) dt$$

et donc, puisque

$$g_\alpha(x) - \frac{\sin x}{x^\alpha} = -\frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\right) \sim -\frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}} \leq 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

de même nature que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} dt.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 33 / 92

Exercice 3 Q 2

Or

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^{2\alpha}} - \frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}} \right)$$

où, par un argument similaire à celui employé en **1.b.**, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^{2\alpha}} dt$ converge. Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2\alpha}}$, c'est-à-dire convergente si, et seulement si, $2\alpha > 1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t) dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 34 / 92

Exercice 4

Pour $x \geq 1$ donné, l'application de l'inégalité des accroissements finis à la fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[1, x]$ donne, puisque $f'(t) \geq \alpha$ pour tout $t \in [1, x]$:

$$f(x) - f(1) \geq \alpha(x - 1).$$

Par suite,

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{f(x)}{x^2} \geq \frac{f(1) + (\alpha - 1)x}{x^2} \sim \frac{\alpha - 1}{x} \geq 0, \quad x \rightarrow +\infty$$

d'où l'on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$ diverge par comparaison à l'intégrale de Riemann divergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 35 / 92

Exercice 5

Question 1

La fonction $f : t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $]0, \pi/2[$ et, lorsque $t \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \ln(t(1 + o(1))) = \ln t + \ln(1 + o(1)) \\ &= \ln t + o(1) = \ln t + o(\ln t) \sim \ln t \leq 0. \end{aligned}$$

Par comparaison à l'intégrale convergente $\int_0^1 \ln t dt$, on en déduit que l'intégrale I est convergente.

Puis le changement de variable affine $u = \pi/2 - t$ transforme

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt \quad \text{en} \quad \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = J$$

et assure donc que ces deux intégrales sont de même nature donc toutes deux convergentes, et de même valeur.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 36 / 92

Exercice 5

Question 2

Il vient :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Le changement de variable affine $s = 2t$ suivi du changement de variable affine $u = \pi - s$ dans la deuxième intégrale donnent ensuite :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin s) ds \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin s) ds + \int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin s) ds + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u) du \right) = I. \end{aligned}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 37 / 92

Exercice 5

Question 2

On en déduit la valeur de :

$$I = J = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 38 / 92

Exercice 6

Question 1

La fonction

$$t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 :

$$f(t) = \frac{\sin^3 t}{t} \sim \frac{t^3}{t} = t^2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

De plus,

$$\forall t \geq 1, \quad |f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$$

d'où l'on déduit la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$, par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 39 / 92

Exercice 6

Question 2

On obtient par linéarisation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin^3 t = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$$

d'où,

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt &= \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{1}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2} dt \\ &= \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{1}{4} \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin u}{(u/3)^2} \frac{du}{3} \\ &= \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt \end{aligned}$$

toutes intégrales convergentes puis, par passage à la limite lorsque $x \rightarrow 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 40 / 92

Exercice 6 Q 3

Exercice 6

Question 3

D'après le développement limité

$$g(t) = \frac{\sin t - t}{t} = \frac{-t^3/6 + o(t^3)}{t} \sim -\frac{t^2}{6} \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow 0$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 41 / 92

Exercice 6 Q 4

Exercice 6

Question 4

On a :

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t} dt = \int_x^{3x} \frac{\sin t - t}{t^2} dt + \int_x^{3x} \frac{dt}{t} = \int_x^{3x} g(t) dt + \ln 3$$

où, puisque la fonction g est continue sur $[0, +\infty[$, la fonction

$$x \mapsto \int_0^{3x} g(t) dt$$

est continue (et même dérivable) sur $[0, +\infty[$, si bien que :

$$\int_x^{3x} g(t) dt = \int_0^{3x} g(t) dt - \int_0^x g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

On peut donc conclure d'après la question 2. :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3 \ln 3}{4}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 42 / 92

Exercice 7 Q 1

Exercice 7

Question 1

Pour $n \geq 1$ donné, la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

est continue sur $[0, +\infty[$. En observant que

$$f_n(x) \sim \frac{1}{x^{2n}} \geq 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

on justifie la convergence de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}}$, convergente puisque $2n \geq 2 > 1$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 43 / 92

Exercice 7 Q 2

Exercice 7

Question 2

Pour $n \geq 1$ donné, on obtient par intégration par parties sur un segment $[0, x] \subset [0, +\infty[$:

$$\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} - \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} \right)$$

d'où, par passage à la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$, vu les convergences établies en 1., $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$ c'est-à-dire :

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 44 / 92

Exercice 7 Q 3

Exercice 7

Question 3

En itérant la relation de récurrence obtenue en 2., on conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} \dots \frac{1}{2} I_1 = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2}$$

ce que l'on démontre ensuite par récurrence. L'expression précédente peut être reformulée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{(2n-2)!}{(2n-2)^2(2n-4)^2 \dots 2^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 45 / 92

Exercice 8

Exercice 8

S'il n'existe pas de réel $x_0 \in]1, +\infty[$ tel que $x_0^2 f(x_0) = 1$, alors la fonction continue $g : x \mapsto f(x) - \frac{1}{x^2}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]1, +\infty[$: elle y garde donc un signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Ainsi la fonction g est continue et garde un signe constant sur l'intervalle $]1, +\infty[$ sans y être identiquement nulle, alors que

$$\int_1^{+\infty} g(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 0,$$

ce qui est absurde.

L'hypothèse de départ est donc fautive : il existe un réel $x_0 \in]1, +\infty[$ tel que $x_0^2 f(x_0) = 1$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 46 / 92

Exercice 9

Exercice 9

On vérifie tout d'abord que les intégrales généralisées sont bien définies.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul de degré $d : P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. Pour $k \in [0, n]$, la fonction $t \mapsto e^{-t} P(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec :

$$e^{-t} P(t) \sim e^{-t} a_d t^{k+d} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

On en déduit que l'intégrale

$$x_k(P) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) dt$$

converge absolument par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 47 / 92

Exercice 9

Exercice 9

On peut donc définir l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, P \mapsto (x_0(P), \dots, x_n(P)),$$

qui est linéaire par linéarité de l'intégrale généralisée convergente, dont on veut établir la bijectivité.

Comme les espaces $\mathbb{R}_n[X]$ et \mathbb{R}^{n+1} sont de même dimension finie $n+1$, il suffit de démontrer que φ est injective.

Or, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ est tel que $\varphi(P) = 0$, alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k P(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k x_k(P) = 0.$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t} P(t)^2$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$, il en résulte que $e^{-t} P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. Ainsi le polynôme P admet une infinité de racines donc est nul.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 48 / 92

Exercice 10 Q 1

Exercice 10

Question 1

Pour $x > 0$ donné, la fonction

$$f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$$

est continue sur $[x, +\infty[$. Par ailleurs,

$$t^2 f(t) = te^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui signifie que $0 \leq f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale $J(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 49 / 92

Exercice 10 Q 2

Exercice 10

Question 2

Pour $x > 0$ donné, on obtient par intégration par parties sur un segment $[x, y] \subset [x, +\infty[$:

$$\int_x^y \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^y - \int_x^y \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-y}}{y} - \int_x^y \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

d'où, en passant à la limite lorsque $y \rightarrow +\infty$,

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 50 / 92

Exercice 10 Q 2

Or

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2} dt = \frac{e^{-x}}{x^2} = o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty$$

(toutes intégrales convergentes), d'où l'on déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty$$

si bien que

$$J(x) = \frac{e^{-x}}{x} + o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \sim \frac{e^{-x}}{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 51 / 92

Exercice 11 Q 1

Exercice 11

Question 1

Tout d'abord, la convergence des intégrales !

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : x \in [0, +\infty[\mapsto \left(\frac{\sin x}{2+x^3}\right)^n$$

est continue sur $[0, +\infty[$. On a par ailleurs $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ si bien que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est absolument convergente donc convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} dt/t^2$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 52 / 92

Exercice 11 Q 1

Puis la convergence de la suite.

À $t \in [0, +\infty[$ fixé, $f_n(t)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. On peut donc conjecturer la convergence de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers 0 (attention, les choses ne se passent pas toujours aussi bien : on ne peut pas échanger $\lim_{n \rightarrow \infty}$ et \int_a^b en général !). Pour le démontrer, on cherche une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers 0 telle que $|I_n| \leq \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La difficulté tient à ce qu'on ne sait pas primitiver simplement la fonction f_n . On peut donc tenter de majorer $|f_n|$ par une fonction g_n aisément primitivable dont l'intégrale tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{x^{3n}} = g_n(x).$$

En effet, $\int_1^{+\infty} g_n(t) dt$ est une intégrale de Riemann convergente avec :

$$\int_1^{+\infty} g_n(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3n}} = \frac{1}{3n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

mais l'intégrale $\int_0^1 g_n(t) dt$ diverge car $3n \geq 1$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 53 / 92

Exercice 11 Q 1

Pour contourner le problème, on majore différemment $|f_n|$ sur les intervalles $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$: comme l'intervalle $[0, 1]$ est borné, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 |f_n(t)| dt \leq \int_0^1 \left(\frac{|\sin t|}{2+t^3}\right)^n dt \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n dt = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dans ces conditions,

$$|I_n| \leq \int_0^1 |f_n(t)| dt + \int_1^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3n-1} = \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Remarque. On peut aussi conclure grâce à une majoration valable sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |I_n| \leq \int_0^{+\infty} \left(\frac{|\sin t|}{2+t^3}\right)^{n-1} \cdot \frac{|\sin t|}{2+t^3} dt \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{2+t^3} dt,$$

où l'intégrale du membre de droite est une constante, bien définie car l'intégrale I_1 converge absolument.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 54 / 92

Exercice 11 Q 2

Exercice 11

Question 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, la fonction

$$h_n : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{1}{(1+x^5)^n}$$

est continue sur $[0, +\infty[$. Puis $h_n(x) \sim \frac{1}{x^{5n}} \geq 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ de sorte que $J_n = \int_0^{+\infty} h_n(t) dt$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} dt/t^{5n}$, convergente puisque $5n \geq 5 > 1$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 55 / 92

Exercice 11 Q 2

Les techniques utilisées en 1.b. ne s'appliquent pas directement ici car la suite géométrique sous l'intégrale a une raison qui s'approche dangereusement de 1 lorsque $t \rightarrow 0$. On les conjugue en jouant sur la longueur du premier morceau. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \varepsilon/2$ et on écrit (toutes intégrales convergentes) :

$$\begin{aligned} |J_n| &\leq \int_0^\delta \frac{dt}{(t^5+1)^n} + \int_\delta^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^5)^n} \\ &\leq \int_0^\delta dt + \int_\delta^{+\infty} \frac{1}{(1+t^5)^{n-1}} \frac{1}{1+t^5} dt \\ &\leq \delta + \int_\delta^{+\infty} \frac{1}{(1+\delta^5)^{n-1}} \frac{dt}{1+t^5} = \delta + \left(\frac{1}{1+\delta^5}\right)^{n-1} \cdot J_1. \end{aligned}$$

Comme le membre de droite tend vers $\delta < \varepsilon$ lorsque $n \rightarrow \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|I_n| \leq \varepsilon$, ce qui établit la convergence de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers 0.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 56 / 92

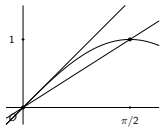
Exercice 12 Q 1

Exercice 12

Question 1

On peut bien sûr faire l'étude de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\pi}{2} \sin x - x$: elle est croissante puis décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc prend des valeurs supérieures ou égales à $\varphi(0) = \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Mais il est plus élégant de faire appel à des arguments de convexité. Puisque $\sin'' = -\sin$ est négatif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction \sin est concave sur cet intervalle. Sa courbe représentative se situe donc « au-dessus de ses cordes » et « en-dessous de ses tangentes ». En travaillant sur la tangente à l'origine et sur la corde reliant les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$, on obtient l'inégalité classique :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$


www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 57 / 92

Exercice 12 Q 2.a

Exercice 12

Question 2.a

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a tout d'abord, par croissance de l'intégrale :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t e^{-t^2|\sin t|} dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (n+1)\pi e^{-n^3\pi^3|\sin t|} dt.$$

Puis, la fonction $t \mapsto e^{-n^3\pi^3|\sin t|}$ étant π -périodique, son intégrale sur un segment de longueur π ne dépend pas du choix du segment, si bien que

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n^3\pi^3|\sin t|} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-n^3\pi^3|\sin t|} dt.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 58 / 92

Exercice 12 Q 2.a

On poursuit en utilisant la parité de la fonction $t \mapsto e^{-n^3\pi^3|\sin t|}$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-n^3\pi^3|\sin t|} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-n^3\pi^3|\sin t|} dt = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-n^3\pi^3 \sin t} dt.$$

On peut alors utiliser l'inégalité de la question 1. :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-n^3\pi^3 \sin t} dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2n^3\pi^2 t} dt = \frac{1}{2n^3\pi^2} (1 - e^{-2n^3\pi^2}) \leq \frac{1}{2n^3\pi^2}.$$

D'où le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \frac{n+1}{n^3\pi}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 59 / 92

Exercice 12 Q 2.b

Exercice 12

Question 2.b

La fonction f étant positive, il suffit de montrer que la fonction

$$F : x \in [0, +\infty[\mapsto \int_0^x f(t) dt$$

est majorée. Or, pour $x \in [0, +\infty[$ donné et $n = \lfloor x/\pi \rfloor$, on a $x < (n+1)\pi$ d'où, toujours par positivité de f et d'après la question a.,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^{(n+1)\pi} f(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n u_k \leq u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k^3\pi} \leq u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3\pi}. \end{aligned}$$

En effet, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3\pi}$ converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$:

$$\frac{n+1}{n^3\pi} \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2} \geq 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 60 / 92

Exercice 12 Q 3

Exercice 12

Question 3

La condition $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ n'est pas suffisante vu le contre-exemple de l'intégrale de Riemann divergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$. Elle n'est pas non plus nécessaire : la fonction de la question 2. fournit un contre-exemple.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 61 / 92

Exercice 17 Q 1

Exercice 17

Question 1

Il vient lorsque $x \rightarrow 0$:

$$f(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} - x}{2x \sin \frac{x}{2}} = \frac{-\frac{1}{24}x^3 + o(x^3)}{2x \sin \frac{x}{2}} \sim \frac{-\frac{1}{24}x^3}{x^2} = -\frac{1}{24}x + o(x).$$

On peut donc prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0) = 0$ et la fonction ainsi prolongée est dérivable à l'origine avec $f'(0) = -\frac{1}{24}$ vu le développement limité à l'ordre 1 établi ci-dessus.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 62 / 92

Exercice 17 Q 1

La fonction f est par ailleurs de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi[$ par opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 , avec au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{x^2 \cos \frac{x}{2} - (2 \sin \frac{x}{2})^2}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{x^2(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)) - (x - \frac{x^3}{24} + o(x^4))^2}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \sim \frac{-\frac{1}{24}x^4}{x^4} \rightarrow -\frac{1}{24} = f'(0). \end{aligned}$$

Ainsi f' est continue en 0 et donc de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi[$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 63 / 92

Exercice 17 Q 2

Exercice 17

Question 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}}$$

est continue sur $]0, \pi[$ et se prolonge par continuité en 0 :

$$\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \sim \frac{\frac{2n+1}{2}x}{\frac{x}{2}} \rightarrow 2n+1, \quad x \rightarrow 0.$$

Son intégrale I_n est donc faussement généralisée.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 64 / 92

Exercice 17 Q 2

Par ailleurs, en utilisant la formule

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

il vient :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \left(\sin \left(\frac{2n+3}{2} t \right) - \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) \right) \frac{dt}{\sin \frac{t}{2}}$$

$$= 2 \int_0^\pi \cos((n+1)t) dt = 0$$

d'où l'on déduit que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = I_0 = \pi.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 65 / 92

Exercice 17 Q 3

Exercice 17

Question 3

Par intégration par parties, il vient pour $\lambda > 0$:

$$\int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{g(a) \cos(\lambda a) - g(b) \cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b g'(t) \cos(\lambda t) dt$$

d'où :

$$\left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} (|g(a) \cos(\lambda a)| + |g(b) \cos(\lambda b)|) + \left| \int_a^b g'(t) \cos(\lambda t) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} (|g(a)| + |g(b)|) + \int_a^b |g'(t) \cos(\lambda t)| dt$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} (|g(a)| + |g(b)|) + \int_a^b |g'(t)| dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

si bien, par encadrement, que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 66 / 92

Exercice 17 Q 4

Exercice 17

Question 4

On commence par justifier la convergence de l'intégrale de Dirichlet. Pour cela, une intégration par parties sur un segment $[1, x] \subset [1, +\infty[$ donne :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_1^x - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt. \quad (*)$$

Partant de

$$\forall t \geq 1, \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2},$$

on justifie la convergence absolue donc la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$, d'où il ressort que l'intégrale partielle $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On en déduit que l'intégrale partielle (*) admet également une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$, ce qui établit la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité à l'origine, d'où la convergence de l'intégrale de Dirichlet.

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 67 / 92

Exercice 17 Q 4

Pour en calculer la valeur, on tente de rapprocher I_n d'une intégrale partielle : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = 2 \int_0^\pi \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^\pi \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) \left(\frac{1}{2} - f(t) \right) dt$$

$$= 2 \int_0^\pi \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) \frac{dt}{2} - 2 \int_0^\pi \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) f(t) dt$$

où, par changement de variable affine $u = \frac{2n+1}{2} t$,

$$\int_0^\pi \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) \frac{dt}{2} = \int_0^{\frac{2n+1}{2} \pi} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

et, d'après le résultat établi en 3. appliqué à la fonction f , de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$ d'après 1.,

$$\int_0^\pi \sin \left(\frac{2n+1}{2} t \right) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il en ressort d'après 2. que :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 68 / 92

Exercice 18 Q 1.a

Exercice 18

Question 1.a

- Pour $n \in \mathbb{N}$, les intégrales

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

ne sont pas généralisées : on y intègre des fonctions continues sur un segment.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec :

$$f_n(x) \sim \frac{1}{x^{2n}} \geq 0, \quad x \rightarrow +\infty$$

si bien que l'intégrale $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n}}$, convergente puisque $2n \geq 2 > 1$.

- Enfin, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec :

$$e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 69 / 92

Exercice 18 Q 1.b

Exercice 18

Question 1.b

Le changement de variable $x = \cos t$ donne (dans l'intégrale définie I_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = - \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)^n \sin t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = W_{2n+1}.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 70 / 92

Exercice 18 Q 1.c

Exercice 18

Question 1.c

Le changement de variable $t \mapsto x = \tan t$, de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$, donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+\tan^2 t)^{n-1}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)^{n-1} dt = W_{2n-2}.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 71 / 92

Exercice 18 Q 2.a

Exercice 18

Question 2.a

La convexité de la fonction exponentielle donne immédiatement :

$$\forall u \in \mathbb{R}, e^u \geq 1 + u$$

d'où l'on déduit en particulier que :

$$\forall x \in [0, 1], 1 - x^2 \leq e^{-x^2}.$$

Il en ressort également que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, 0 < 1 + x^2 \leq e^{x^2},$$

ce qui donne la deuxième inégalité :

$$\forall x \in [0, +\infty[, e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 72 / 92

Exercice 18 Q 2.b

Exercice 18

Question 2.b

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient d'après la question a. :

$$\forall x \in [0, 1], (1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2}$$

d'où

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx$$

par convergence et positivité de $\int_1^{+\infty} e^{-nx^2} dx$ (justifiée ci-dessous).

En parallèle, on a :

$$\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx$ et l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = J_n.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 73 / 92

Exercice 18 Q 2.b

Il reste à observer, par changement de variable affine $t = \sqrt{nx}$, que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{n}} = \frac{I}{\sqrt{n}}$$

pour conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}I_n \leq I \leq \sqrt{n}J_n.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 74 / 92

Exercice 18 Q 3.a

Exercice 18

Question 3.a

Pour $n \in \mathbb{N}$ donné et $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$ d'où $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$, si bien que $W_{n+1} \leq W_n$ par croissance de l'intégrale.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on procède par intégration par parties en dérivant $t \mapsto \cos^{n+1} t$ et en primitivant $t \mapsto \cos t$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos t)(\cos t)^{n+1} dt \\ &= [(\sin t)(\cos t)^{n+1}]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 (\cos t)^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - (\cos t)^2)(\cos t)^n dt = (n+1)(W_n - W_{n+2}). \end{aligned}$$

On en déduit la formule attendue $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 75 / 92

Exercice 18 Q 3.a

En utilisant les deux points précédents, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2}W_n = W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

En divisant chaque membre de cette inégalité par $W_n > 0$ (la fonction \sin^n est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$), on en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1,$$

d'où il ressort par encadrement que $W_{n+1}/W_n \rightarrow 1$ c'est-à-dire que $W_{n+1} \sim W_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 76 / 92

Exercice 18 Q 3.b

Exercice 18

Question 3.b

La formule de la question a. donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$$

ce qui montre que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Elle est donc égale à son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

D'après la question a., on a donc :

$$W_n^2 \sim W_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2n}, \quad n \rightarrow \infty$$

et finalement :

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 77 / 92

Exercice 18 Q 4

Exercice 18

Question 4

D'après les questions 1.b. et 3.b.,

$$\sqrt{n}I_n = \sqrt{n}W_{2n+1} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad n \rightarrow \infty$$

et de même, d'après 1.c.,

$$\sqrt{n}J_n = \sqrt{n}W_{n-2} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Il en ressort par passage à la limite dans l'inégalité de la question 2.b. que :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 78 / 92

Exercice 19 Q 1

Exercice 19

Question 1

Il s'agit de montrer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ donné, que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} dt$ est bien définie. Il s'agit en fait d'une intégrale faussement généralisée car la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 :

$$\frac{\sin(xt)}{t} \sim \frac{xt}{t} = x \rightarrow x, \quad t \rightarrow 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 79 / 92

Exercice 19 Q 2.a

Exercice 19

Question 2.a

On pense naturellement à l'inégalité de Taylor-Lagrange, mais il n'est pas possible de l'appliquer directement à la fonction f , dont on a la dérivabilité n'est pas encore acquise (cf. question b.). On l'applique plutôt à une fonction auxiliaire. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \int_0^1 \cos(x_0 t) dt &= \\ &= \int_0^1 (\sin(xt) - \sin(x_0 t) - (x - x_0) \cos(x_0 t)) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 80 / 92

Exercice 19 Q 2.a

Or, pour $t \in]0, 1]$ donné, la fonction $\varphi_t : x \mapsto \sin(xt)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |\varphi_t''(x)| = |-t^2 \sin(xt)| \leq t^2.$$

On obtient donc pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, par application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction φ_t sur $[x_0, x]$:

$$|\varphi_t(x) - \varphi_t(x_0) - (x - x_0)\varphi_t'(x_0)| \leq t^2 \frac{(x - x_0)^2}{2}$$

si bien que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \in]0, 1],$$

$$|\sin(xt) - \sin(x_0t) - (x - x_0)t \cos(x_0t)| \leq t^2 \frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 81 / 92

Exercice 19 Q 2.a

Il vient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \int_0^1 \cos(x_0t) dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 (\sin(xt) - \sin(x_0t) - (x - x_0) \cos(x_0t)) \frac{dt}{t} \right|$$

$$\leq \int_0^1 |\sin(xt) - \sin(x_0t) - (x - x_0) \cos(x_0t)| \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_0^1 t \frac{(x - x_0)^2}{2} dt = \frac{(x - x_0)^2}{4}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 82 / 92

Exercice 19 Q 2.b

Exercice 19

Question 2.b

Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la question a. fournit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{x_0\}, \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \int_0^1 \cos(x_0t) dt \right| \leq \frac{|x - x_0|}{4} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

si bien que par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \int_0^1 \cos(x_0t) dt$$

ce qui justifie la dérivabilité de f en tout point $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ avec :

$$f'(x_0) = \int_0^1 \cos(x_0t) dt = \frac{\sin x_0}{x_0}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 83 / 92

Exercice 20 Q 1

Exercice 20

Question 1

Pour $x > 0$, on a :

$$\forall t \in]0, 1], \quad t^{x-1} e^{-t} \geq t^{x-1} e^{-1}$$

d'où :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \geq \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \geq \frac{1}{e} \int_0^1 t^{x-1} dt,$$

toutes intégrales convergentes. En observant que

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty,$$

on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = +\infty.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 84 / 92

Exercice 20 Q 2

Exercice 20

Question 2

Pour $x > 1$, on a de même :

$$\forall t \geq 2, \quad t^{x-1} e^{-t} \geq 2^{x-1} e^{-t}$$

d'où :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \geq \int_2^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \geq 2^{x-1} \int_2^{+\infty} e^{-t} dt,$$

toutes intégrales convergentes. Puisque $2^{x-1} \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, il en ressort que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 85 / 92

Exercice 20 Q 3

Exercice 20

Question 3

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_t : x \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1) \ln t - t}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* par opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^2 avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_t'(x) = (\ln t) t^{x-1} e^{-t}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_t''(x) = (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 86 / 92

Exercice 20 Q 4.a

Exercice 20

Question 4.a

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ donné, l'inégalité demandée s'obtient par application directe de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur le segment $[x, x+h]$ à la fonction f_t , de classe \mathcal{C}^2 , à condition de montrer que :

$$\forall y \in [x, x+h], \quad |f_t''(y)| \leq M_2(t, x).$$

Or, pour $y \in [x, x+h] \subset [\frac{x}{2}, x+1]$ sachant que $|h| \leq \min(\frac{x}{2}, 1)$, il vient en tenant compte du sens de variation de $\alpha \mapsto t^\alpha$, différent selon la position de t par rapport à 1 :

$$\forall t \geq 1, \quad |f_t''(y)| = (\ln t)^2 t^{y-1} e^{-t} \leq (\ln t)^2 t^x e^{-t} = M_2(t, x)$$

et

$$\forall t \in]0, 1], \quad |f_t''(y)| = (\ln t)^2 t^{y-1} e^{-t} \leq (\ln t)^2 t^{x/2} e^{-t} = M_2(t, x)$$

d'où le résultat.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 87 / 92

Exercice 20 Q 4.b

Exercice 20

Question 4.b

La fonction $t \mapsto (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1}$ est continue sur $]0, 1]$. Sachant $x > 0$, on peut choisir un réel α tel que $1 - \frac{x}{2} < \alpha < 1$ et alors :

$$0 \leq (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} \sim (\ln t)^2 t^{x/2-1} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), \quad t \rightarrow 0$$

par croissances comparées, d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} dt$$

par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, convergente puisque $\alpha < 1$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 88 / 92

La fonction $t \mapsto (\ln t)^2 e^{-t} t^x$ est continue sur $[1, +\infty[$ avec :

$$(\ln t)^2 e^{-t} t^x = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \rightarrow +\infty$$

par croissances comparées, si bien que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^x dt$$

converge par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

Exercice 20

Question 4.c

Compte-tenu de la convergence des intégrales en jeu (en particulier celle de $\int_0^{+\infty} M_2(t, x) dt$, établie en **b.**, mais aussi celle de $\int_0^{+\infty} f'_t(x) dt$ que l'on justifierait de la même manière ou que l'on pourrait déduire des autres à partir de l'inégalité de la question **a.**), on peut écrire pour $h \neq 0$ tel que $|h| \leq \min(\frac{x}{2}, 1)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma(x+h) - \Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f'_t(x) dt \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f'_t(x) \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f'_t(x) \right| dt \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} M_2(t, x) dt. \end{aligned}$$

Puisque le dernier majorant tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$ (l'intégrale est une constante par rapport à h), il en ressort par encadrement que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x+h) - \Gamma(x)}{h} = \int_0^{+\infty} f'_t(x) dt,$$

ce qui signifie que Γ est dérivable au point x avec :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f'_t(x) dt = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Exercice 20

Question 5

Pour $x < y$ éléments de \mathbb{R}_+^* , on a :

$$\forall t \geq 1, \quad t^{x-1} e^{-t} \leq t^{y-1} e^{-t}$$

et :

$$\forall t \in]0, 1], \quad t^{x-1} e^{-t} \geq t^{y-1} e^{-t}$$

d'où, en prenant en compte le signe de $\ln t$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln t) t^{x-1} e^{-t} \leq (\ln t) t^{y-1} e^{-t}.$$

Il en ressort, par croissance de l'intégrale généralisée convergente, que :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{y-1} e^{-t} dt = \Gamma'(y).$$

Ainsi la fonction Γ' est croissante sur \mathbb{R}_+^* , ce qui établit la convexité de Γ sur cet intervalle.