

Algèbre linéaire

Feuille d'exercices

1 Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , montrer que les familles suivantes sont libres :

1. $f_a : x \mapsto e^{ax}, a \in \mathbb{R}$; 2. $g_a : x \mapsto |x - a|, a \in \mathbb{R}$; 3. $h_n : x \mapsto \sin nx, n \in \mathbb{N}^*$

2 Les sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n peuvent être définis de trois façons suivantes :

- par des équations cartésiennes :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0, y - 2t = 0\};$$

- par un paramétrage :

$$F = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a)\}_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3};$$

- par la donnée d'une base (ou d'une famille génératrice) :

$$G = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, -1)).$$

Écrire chacun de ces sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 sous les trois formes possibles.

3 Montrer que l'ensemble E des polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 4 vérifiant les équations

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 3a_3 - a_4 = 0 \\ 2a_0 - 4a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 - 4a_2 - 2a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en déterminer une base.

4 Montrer que toute famille de polynômes non nuls et de degrés deux-à-deux distincts est libre.

5 Montrer que toute matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme annulateur non nul.

6 Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On définit l'application $\varphi : E \rightarrow E$ en posant, pour tout $f \in E$,

$$\varphi(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x tf(t) dt.$$

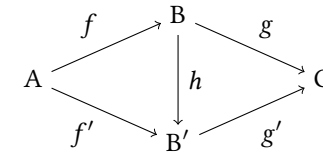
Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif? surjectif?

7 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, démontrer la formule de Taylor pour les polynômes :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P(X + a) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

lorsque P est un monôme puis dans le cas général.

8 Soient A, B, B' et C quatre espaces vectoriels et f, f', g, g' et h des applications linéaires telles que ci-dessous :



On suppose en outre que :

- > $h \circ f = f'$ et $g' \circ h = g$;
- > f et f' sont injectives, g et g' sont surjectives;
- > $\text{Im } f = \text{Ker } g$ et $\text{Im } f' = \text{Ker } g'$.

Le but de l'exercice est de montrer qu'alors h est un isomorphisme.

1. Montrer que pour tout $a \in A$, $g \circ f(a) = 0$ et $g' \circ f'(a) = 0$.
2. Étude de l'injectivité de h .
 - a. Soit $b \in B$ tel que $h(b) = 0$. Montrer que $g(b) = 0$.
 - b. Justifier qu'il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$.
 - c. En calculant $f'(a)$, montrer que $b = 0$ et conclure.
3. Étude de la surjectivité de h .
 - a. Soit $b' \in B'$. Montrer qu'il existe $b \in B$ tel que $g(b) = g'(b')$.
 - b. Justifier que $h(b) - b' \in \text{Im } f'$ puis $h(b) - b' \in \text{Im } h$.
 - c. Conclure.

9 Soit $(a, b) \in \mathbb{K} \times (\mathbb{K} \setminus \{0\})$. On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{K} vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. a. Montrer que l'application

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^2, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$$

est un isomorphisme de E sur \mathbb{K}^2 .

- b. En déduire que E est de dimension 2.
3. En déduire une démonstration du résultat du cours donnant une description des éléments de E.

10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, montrer que l'ensemble

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] : \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$; en déterminer la dimension puis en donner une base.

- 11** Soient $n \geq 1$ et a_0, a_1, \dots, a_n des scalaires deux-à-deux distincts. Justifier que pour tous scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Indication. On pourra introduire l'application

$$\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

- 12** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.

On considère l'application $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + (\text{tr } M)A.$$

1. Montrer que si $\text{tr } A \neq -1$, alors f est bijective.
2. On suppose dans cette question que $\text{tr } A = -1$.
 - a. Déterminer le noyau de f .
 - b. Montrer que :

$$\text{Im } f = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) : \text{tr } M = 0\}.$$

3. Soit $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + (\text{tr } X)A = B$$

d'inconnue $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

- 13** Soit f un endomorphisme donné d'un espace vectoriel E de dimension n . Déterminer la dimension de

$$F = \{g \in \mathbf{L}(E) : g \circ f = f \circ g = 0\}.$$

- 14** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E . On suppose que

$$E = \text{Im } u + \text{Im } v = \text{Ker } u + \text{Ker } v.$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

- 15** Donner une base du noyau et de l'image de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 16** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f^2(P_0) - 6f(P_0)$ où $P_0 = 2X^2 + X - 1$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f - 2 \text{id})$ et $\text{Ker}(f - 4 \text{id})$.
3. Montrer que $f^2(P) = 6f(P) - 8P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

- 17** On considère l'application f qui, à $P \in \mathbb{R}_3[X]$, associe

$$f(P) = -\frac{1}{6}P^{(3)}(0) \cdot (X^3 - X^2 - 2X) - \frac{1}{2}P''(0) \cdot (X^2 - 3X) + 2P'(0) \cdot X + 2P(0).$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice A représentant f en base canonique.
3. Montrer que $\underline{e} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base \underline{e} .
4. Exprimer la matrice B de f en base \underline{e} .
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n et en déduire A^n .

- 18** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Vérifier que $f : P(X) \mapsto P(X+a)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice A de f en base canonique.
3. Justifier que A est inversible et calculer A^{-1} .
4. Montrer que pour tout $p, q \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $p < q$, on a :

$$\sum_{k=p}^q (-1)^{q-k} \binom{k}{p} \binom{q}{k} = 0.$$

- 19** On considère deux espaces vectoriels E et F de dimensions respectives 3 et 2, rapportés respectivement à des bases $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Soit $f : E \rightarrow F$ l'application linéaire représentée dans les bases \underline{e} et $\underline{\varepsilon}$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$ et $e'_3 = e_1 + e_2$. Déterminer la matrice B représentative de f dans les bases \underline{e}' et $\underline{\varepsilon}$.
2. On pose $\varepsilon'_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $\varepsilon'_2 = 5\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$. Déterminer la matrice C représentative de f dans les bases \underline{e}' et $\underline{\varepsilon}'$.

- 20** Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

21 Vérifier que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$$

sont semblables et trouver toutes les matrices P inversibles telles que $P^{-1}AP = B$.

22 Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Déterminer $\text{rg } f$ et $\text{rg } f^2$ ainsi que la dimension de $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } f^2$ puis montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle f est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

23 Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et u, v les endomorphismes de E définis par

$$u : P(X) \mapsto P(X+1) \quad \text{et} \quad v : P(X) \mapsto P(X-1).$$

Discuter, en fonction du réel k , le rang de l'endomorphisme $u + kv$ de E .

24 Peut-on trouver deux matrices $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

25 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit f un endomorphisme de E . Justifier que toutes les matrices représentatives de f ont même trace ; cette valeur commune est appelée trace de l'endomorphisme f et notée $\text{tr } f$.
2. Soit p un projecteur de E . Montrer que $\text{tr } p = \text{rg } p$.

26 Dans \mathbb{R}^n , montrer que

$$G = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \dots = x_n\} \quad \text{et} \quad H = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$$

sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

27 **Théorème noyau-image**

★ Soient $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et H un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E . Montrer que f induit un isomorphisme de H sur $\text{Im } f$.

28 Soit φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $Q = \varphi(P)$ défini par $Q(X) = P(X+1) + P(X)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. a. Montrer que $\text{Ker } \varphi = \{0\}$. Qu'en déduit-on pour φ ?
b. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme φ_n surjectif.
c. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3. Soient $\psi = \varphi - 2 \text{id}_{\mathbb{R}[X]}$ et H l'ensemble des polynômes s'annulant en 0. On note $H_n = H \cap \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a. Justifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, ainsi que H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer le degré de $\psi(P)$ en fonction de celui de P .
- c. En déduire que $\text{Ker } \psi = \mathbb{R}_0[X]$.
- d. Montrer que $\text{Ker } \psi$ et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire que ψ induit un isomorphisme de H sur $\text{Im } \psi$.
- e. Montrer que ψ est surjective.

4. En déduire l'existence d'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que $U_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad U_n(X+1) = U_n(X) + U_{n-1}(X).$$

Préciser le degré de U_n et son coefficient dominant.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (U_0, U_1, \dots, U_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\varphi(P_n) = 2X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. a. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x).$$

- b. En déduire les valeurs de $P_{2n}(0)$, $P_{2n}(1)$ et $P_{2n+1}(\frac{1}{2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c. Démontrer que $P'_n = nP_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer P_3 , P_4 et P_5 .
- d. Dresser le tableau de variations des restrictions des fonctions polynomiales P_n à l'intervalle $[0, 1]$ (on pourra utiliser une récurrence sur n).

29 On se place dans \mathbb{R}^3 . Calculer la matrice représentant dans la base canonique la composée de l'homothétie de rapport 5 et de la projection sur le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ parallèlement à la droite dirigée par le vecteur $(1, 2, 1)$.

30 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et p un projecteur de E . On définit l'application π de $\mathbf{L}(E)$ dans lui-même en posant, pour tout $u \in \mathbf{L}(E)$, $\pi(u) = p \circ u$. Montrer que π est un projecteur de $\mathbf{L}(E)$.

31 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p \circ q = q$ si, et seulement si, $\text{Im } q \subset \text{Im } p$.
2. Montrer que $p \circ q = p$ si, et seulement si, $\text{Ker } q \subset \text{Ker } p$.

32 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E .

Montrer que u commute avec p si, et seulement si, les sous-espaces $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont stables par u .

33 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

- ★ 1. Montrer qu'on a équivalence entre les assertions suivantes :
(i) $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$; (ii) $\text{Im } u = \text{Im } u^2$; (iii) $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.

2. Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces conditions.

3. Le résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?

34 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est dite magique s'il existe un scalaire τ_A tel que les sommes des coefficients se trouvant sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale de A soient toutes égales à τ_A .

1. a. Vérifier que l'ensemble \mathcal{M} des matrices magiques de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel pour les lois matricielles usuelles.

b. Justifier que $\tau : A \mapsto \tau_A$ est une application linéaire sur \mathcal{M} .

2. Montrer que les ensembles E des matrices A magiques symétriques telles que $\tau_A = 0$, F des matrices magiques antisymétriques et G des matrices dont tous les coefficients sont égaux sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathcal{M} .

35 Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{id}_E$. Montrer que :

$$E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j^2 \text{id}_E).$$

36 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie rapporté à une base (e_1, \dots, e_n) . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère le sous-espace vectoriel F_i de E engendré par la famille $(e_j)_{j \neq i}$ ainsi que le sous-espace vectoriel $G_i = \{f \in \mathbf{L}(E) : \text{Ker } f \supset F_i\}$ de $\mathbf{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathbf{L}(E) = \bigoplus_{i=1}^n G_i.$$

37 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On s'intéresse aux endomorphismes f de E qui commutent
★ avec tous les autres :

$$\forall g \in \mathbf{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f. \quad (*)$$

1. Proposer des solutions évidentes.

2. On suppose dans cette question l'espace E de dimension finie n . En raisonnant matriciellement, déterminer tous les endomorphismes f de E réalisant $(*)$.

Indication. On utilisera la base canonique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

3. a. Démontrer le lemme suivant, intéressant en lui-même et souvent utile : un endomorphisme f de E est une homothétie si, et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

b. En raisonnant géométriquement, et à l'aide du lemme précédent, déterminer tous les endomorphismes f de E satisfaisant $(*)$.

Indication. On écrira qu'un tel endomorphisme f commute en particulier avec les symétries.

38 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E . On
★♣ suppose f nilpotent, i.e. l'existence d'un entier $k \geq 1$ tel que $f^k = 0$. On appelle indice de

nilpotence p de f le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $f^k = 0$; on a donc $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. Qu'en déduit-on sur f^n ?

On suppose, dans le reste de l'exercice, que l'indice de nilpotence de f est égal à n .

2. Montrer que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim(\text{Ker } f^j) = j$.

3. En déduire que si F est un sous-espace vectoriel de dimension d de E , stable par f , alors $F = \text{Ker } f^d$.

39 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E . On
♣ pose :

$$F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker } f^k \quad \text{et} \quad G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Im } f^k.$$

1. a. Justifier que les suites $(\text{Ker } f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im } f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.

b. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $F = \text{Ker } f^p$ et $G = \text{Im } f^p$.

2. Montrer que :

(i) F et G sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f ;

(ii) l'endomorphisme f induit sur F un endomorphisme f_F nilpotent et sur G un endomorphisme f_G bijectif ;

(iii) les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E .

3. Établir l'unicité du couple (F, G) satisfaisant les trois conditions précédentes. On dit que le couple (F, G) réalise la décomposition de Fitting de E pour l'endomorphisme f .

40 On considère l'endomorphisme $d : P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$.

♣ 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_n[X]$ stables par d .

Indication. Si $F \neq \{0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{K}_n[X]$ stable par d , on pourra considérer un polynôme de degré maximal dans F .

2. En déduire les sous-espaces vectoriels de dimension finie de $\mathbb{K}[X]$ qui sont stables par d .

3. En déduire les sous-espaces vectoriels de dimension infinie de $\mathbb{K}[X]$ qui sont stables par d .

Programmation :

> Classe : 1, 4, 5, 6, 7, 8, (9), 10, 11, 12, 15, 16, 20, 26, 29, (33), (37), 38 (q. 1)

> TD : 2, 3, 19, 23, 32

> TD* : 13, 38 (q. 2, 3), 27, 28, 2

> DL : 39