Travaux dirigés

Révisions d'algèbre linéaire

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

Exercice 1

Question 1

Il suffit de traiter le cas d'une sous-famille finie. Pour $a_1 < \cdots < a_n$ réels, on veut donc établir la liberté de la famille $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$. On considère pour cela des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_i \lambda_i f_{a_i} = 0$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}^{a_i x} = 0.$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}^{(a_i - a_n)x} = 0$$

d'où, en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, $\lambda_n = 0$. Ce raisonnement permet de justifier l'hérédité dans une démonstration par récurrence sur n de la liberté de la famille $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$.

Exercice 1

Question 2

Pour $a_1, \ldots, a_n$ deux-à-deux distincts, on souhaite établir la liberté de la famille $(g_{a_1}, \ldots, g_{a_n})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels tels que $\sum_i \lambda_i g_{a_i} = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x - a_i| = 0$$

ou encore, pour $i_0 \in [\![1, n]\!]$ donné,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{i_0} |x - a_{i_0}| = -\sum_{i \neq i_0} \lambda_i |x - a_i| .$$

Puisque l'expression de droite est dérivable en a_{i_0} alors que $x \longmapsto |x - a_{i_0}|$ ne l'est pas, on a nécessairement $\lambda_{i_0} = 0$, d'où le résultat.

Exercice 1

Question 3

Exercice 2

Énoncé

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définis de trois façons suivantes :

- par des équations cartésiennes :
$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0, y - 2t = 0\}$$
- par un paramétrage :
$$F = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a)\}_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3}$$
- par la donnée d'une base (ou d'une famille génératrice) :
$$G = \mathrm{Vect}\big((1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, -1)\big).$$

Écrire chacun de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ sous les trois formes possibles.

Exercice 2

Équations cartésiennes -> Paramétrage -> Famille génératrice

Il suffit d'appliquer la méthode du pivot de Gauss au système d'équations de E : pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z, t) \in E \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z + 2t \\ y = 2t \end{cases}$$

$$\iff \exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (-a + 2b, 2b, a, b)$$

$$\iff \exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = a(-1, 0, 1, 0) + b(2, 2, 0, 1).$$

La famille $\big((-1, 0, 1, 0), (2, 2, 0, 1)\big)$ est donc une base de E.

Exercice 2

Paramétrage/Famille génératrice -> Équations cartésiennes

Première méthode

Le sous-espace vectoriel F est formé des vecteurs $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ pour lesquels le système

$$\begin{cases} x = 2a - 3b + c \\ y = a + 2b - c \\ z = -b + c \\ t = a \end{cases} \qquad (S)$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ admet au moins une solution.

Or, pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, la méthode du pivot de Gauss conduit à :

$$(S) \iff \begin{cases} 2a - 3b + c = x \\ a + 2b - c = y \\ -b + c = z \\ a = t \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4}}{\iff} \begin{cases} -3b + c = x - 2t \\ 2b - c = y - t \\ -b + c = z \\ a = t \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\iff} \begin{cases} -2b = x - 2t - z \\ b = y - t + z \\ -b + c = z \\ a = t \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \begin{cases} 0 = x + 2y - 4t + z \\ b = y - t + z \\ -b + c = z \\ a = t \end{cases}$$

L'équation $x+2y-4t+z=0$ est une condition de compatibilité :

- il est nécessaire qu'elle soit satisfaite pour que le système admette des solutions ;
- réciproquement, si elle est satisfaite, alors les trois équations restantes forment un système triangulaire de Cramer et le système (S) admet donc des solutions.

En conclusion, le système (S) admet au moins une solution si, et seulement si, l'équation $x+2y-4t+z=0$ est satisfaite, et celle-ci constitue donc une équation cartésienne de F.

Deuxième méthode
Un système d'équations cartésiennes est constitué d'équations de la forme $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t=0$ avec $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4\setminus\{(0)\}$. Or, en notant H l'hyperplan défini par une telle équation, on a :

$$G\subset H \iff \begin{cases}(1,2,-1,0)\in H\\(0,1,3,-1)\in H\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha+2\beta-\gamma=0\\ \beta+3\gamma-\delta=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=-2\beta+\gamma\\ \delta=\beta+3\gamma\end{cases}$$

En notant H_1 (resp. H_2) l'hyperplan contenant G d'équation obtenue pour le choix de $(\beta,\gamma)=(1,0)$ (resp. $(\beta,\gamma)=(0,1)$) :

$$H_1 : -2x+y+t=0 \qquad (\text{resp. } H_2 : x+z+3t=0),$$

on a donc $G\subset G_0=H_1\cap H_2$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de justifier que les deux sous-espaces G et G_0 ont même dimension :

- le sous-espace G est de dimension 2 car, la famille $\big((1,2,-1,0),(0,1,3,-1)\big)$ étant libre, elle en constitue une base ;
- le sous-espace G_0 est le noyau de l'application linéaire
$$f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2,(x,y,z,t)\longmapsto(-2x+y+t,x+z+3t)$$
or celle-ci est de rang 2 donc, d'après le théorème du rang,
$$\dim G_0=\dim(\operatorname{Ker} f)=4-\operatorname{rg} f=2.$$

En conclusion, le sous-espace G peut être défini par le système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases}-2x+y+t=0\\x+z+3t=0\end{cases}.$$

Exercice 3

Pour $P=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3+a_4X^4\in\mathbb{R}_4[X]$, on a :

$$\begin{aligned}P\in E &\iff \begin{cases}a_0-2a_1+3a_3-a_4=0\\2a_0-4a_2+a_3=0\\a_0+2a_1-4a_2-2a_3+a_4=0\end{cases}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3+L_1}{\iff} \begin{cases}a_0-2a_1+3a_3-a_4=0\\2a_0-4a_2+a_3=0\\2a_0-4a_2+a_3=0\end{cases}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases}a_0-2a_1+3a_3-a_4=0\\2a_0-4a_2+a_3=0\\0=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}3a_3-a_4=-a_0+2a_1\\a_3=-2a_0+4a_2\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\in E &\iff \begin{cases}a_4=-5a_0-2a_1+12a_2\\a_3=-2a_0+4a_2\end{cases}\\
&\iff P=a_0+a_1X+a_2X^2+(-2a_0+4a_2)X^3+(-5a_0-2a_1+12a_2)X^4\\
&\iff \exists!(b_0,b_1,b_2)\in\mathbb{R}^3, P=b_0+b_1X+b_2X^2+(-2b_0+4b_2)X^3+(-5b_0-2b_1+12b_2)X^4\\
&\iff \exists!(b_0,b_1,b_2)\in\mathbb{R}^3, P=b_0(1-2X^3-5X^4)+b_1(X-2X^4)+b_2(X^2+4X^3+12X^4).\end{aligned}$$

On met ainsi en évidence que les vecteurs $P_1=1-2X^3-5X^4$, $P_2=X-2X^4$ et $P_3=X^2+4X^3+12X^4$ forment une base de E.

Exercice 4

Il suffit de démontrer ce résultat dans le cas d'une famille finie. On raisonne par récurrence sur le nombre $r\geqslant 1$ de polynômes de la famille.
Le résultat est évidemment vrai pour $r=1$ puisque le polynôme est supposé non nul.
Si le résultat est acquis pour les familles de r polynômes et si $P_1,\dots,P_{r+1}$ sont $r+1$ polynômes non nuls de degrés deux-à-deux distincts, que l'on peut supposer ordonnés par ordre de degré croissant ($\deg P_1<\cdots<\deg P_{r+1}$), alors la famille $(P_1,\dots,P_r)$ est libre par hypothèse de récurrence et pour des raisons de degré, le polynôme P_{r+1} n'appartient pas au sous-espace engendré par $P_1,\dots,P_r$, de sorte que la famille $(P_1,\dots,P_{r+1})$ est libre.

Exercice 5

Étant donnée une matrice $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, la famille $(I_n,A,A^2,\dots,A^{n^2})$, formée de $n^2+1>n^2$ vecteurs de l'espace $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2, est nécessairement liée. Il existe ainsi $a_0,a_1,a_2,\dots,a_{n^2}\in\mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$a_0I_n+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_{n^2}A^{n^2}=0,$$

c'est-à-dire un polynôme $P=\sum_{k=0}^{n^2}a_kX^k$ non nul tel que $P(A)=0$.

Exercice 6

On remarque pour commencer qu'étant donné $f \in E$, le théorème fondamental assure que la fonction $\varphi(f)$ est dérivable, de dérivée $\varphi(f)' : x \longmapsto xf(x)$.

L'application $\varphi : f \longmapsto \varphi(f)$ est donc bien à valeurs dans E. Par ailleurs, la linéarité de l'intégrale donne celle de φ : pour $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda f + g)(x) &= \int_0^x t\big(\lambda f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (\lambda\varphi(f) + \varphi(g))(x)\end{aligned}$$

si bien que $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.

L'application φ est donc un endomorphisme de E.

Si $f \in E$ est tel que $\varphi(f) = 0$, alors en dérivant cette relation, on obtient $xf(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où naturellement $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$ mais aussi pour $x = 0$ par continuité de f en 0. Ainsi f est la fonction nulle, ce qui établit l'injectivité de φ.

Pour la question de la surjectivité, on a déjà remarqué que tout $f \in E$ a pour image une fonction $\varphi(f)$ dérivable. Or il existe dans E des fonctions non dérivables (par exemple la fonction valeur absolue), qui ne sont donc pas dans l'image de φ. Ainsi $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subsetneq E$ et φ n'est donc pas surjective.

Exercice 7

Cas particulier. On commence par démontrer le résultat pour un monôme de base $P = X^j$, $0 \leqslant j \leqslant n$.

On a :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k)} = (X^j)^{(k)} &= \begin{cases} j(j-1)\cdots(j-k+1)X^{j-k} & \text{si } k \leqslant j \\ 0 & \text{si } k > j\end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{j!}{(j-k)!}X^{j-k} & \text{si } k \leqslant j \\ 0 & \text{si } k > j\end{cases}\end{aligned}$$

si bien que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{P^{(k)}(a)}{k!} = \begin{cases} \binom{j}{k}a^{j-k} & \text{si } k \leqslant j \\ 0 & \text{si } k > j\end{cases}.$$

Or, d'après la formule du binôme,

$$P(X+a) = (X+a)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a^{j-k}X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k$$

car $j \leqslant n$, d'où l'égalité.

Cas général, première méthode

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ que l'on décompose comme combinaison linéaire des vecteurs $P_j = X^j$, $0 \leqslant j \leqslant n$:

$$P = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j = \sum_{j=0}^{n} b_j P_j.$$

On a alors, d'après le cas particulier :

$$\begin{aligned}P(X+a) &= \sum_{j=0}^{n} b_j P_j(X+a) = \sum_{j=0}^{n} b_j \sum_{k=0}^{n} \frac{P_j^{(k)}(a)}{k!}X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big(\sum_{j=0}^{n} b_j P_j^{(k)}(a)\Big)X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k.\end{aligned}$$

Cas général, deuxième méthode

D'après le cas particulier, les deux applications $P \longmapsto P(X+a)$ et

$$P \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k,$$

linéaires sur $\mathbb{K}_n[X]$, coïncident sur les vecteurs d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Elles sont donc égales :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k.$$

Exercice 8

Question 1

Pour $a \in A$, on a $f(a) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ donc $g\big(f(a)\big) = 0$ et de même $g'\big(f'(a)\big) = 0$.

Exercice 8

Question 2

Si $h(b) = 0$, alors $g(b) = g'\big(h(b)\big) = g'(0) = 0$. Ainsi $b \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ et il existe donc $a \in A$ tel que $b = f(a)$. On a alors $f'(a) = h\big(f(a)\big) = h(b) = 0$ ce qui implique, par injectivité de f', que $a = 0$. Il en résulte que $b = 0$ et l'on a donc établi l'injectivité de h.

Exercice 8

Question 3

La surjectivité de g assure que l'élément $g'(b') \in C$ appartient à l'image de g : il existe $b \in B$ tel que $g'(b') = g(b)$. On a alors

$$g'\big(h(b) - b'\big) = g'\big(h(b)\big) - g'(b') = g(b) - g'(b') = 0,$$

si bien que $h(b) - b' \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$. Il existe ainsi $\alpha \in A$ tel que $h(b) - b' = f'(\alpha)$ c'est-à-dire, en posant $\beta = f(\alpha) \in B$, $h(b) - b' = h(\beta)$. On obtient alors $b' = h(b) - h(\beta) = h(b - \beta)$ donc $b' \in \operatorname{Im} h$, ce qui établit la surjectivité de h.

Exercice 10

On vérifie que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$:

- Il contient le polynôme nul car $\int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Pour $P, Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^1 (\lambda P(t) + Q(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

si bien que $\lambda P + Q \in H$.

La vérification précédente devient superflue lorsqu'on s'aperçoit que H est le noyau de l'application *linéaire*

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut alors déterminer la dimension de $H = \dim(\operatorname{Ker}\varphi)$ par application du théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \operatorname{rg}\varphi = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$$

où $\operatorname{rg}\varphi = 1$ ($\operatorname{rg}\varphi \leqslant \dim \mathbb{R} = 1$ et $\operatorname{rg}\varphi = 0$ est exclu car $\varphi(1) = 1 \neq 0$). Ainsi

$$\dim H = n + 1 - \operatorname{rg}\varphi = n$$

et H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

Il suffit alors de trouver n éléments linéairement indépendants de H pour en constituer une base. C'est le cas des polynômes $P_k = X^k - \frac{1}{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \varphi(P_k) = \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t - \frac{1}{k+1} = 0$$

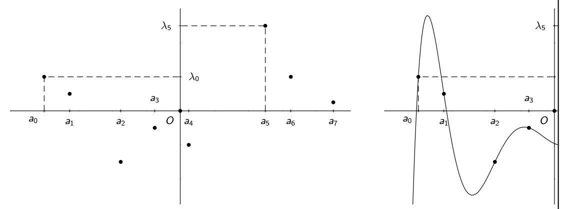
et comme les n polynômes $P_1, \dots, P_n$ sont tous non nuls et de degrés deux-à-deux distincts, ils sont linéairement indépendants. Par suite, $(P_1, \dots, P_n)$ est une base de H.

Exercice 11

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, la condition

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad P(a_i) = \lambda_i$$

signifie que le graphe de la fonction polynomiale associée à P passe par les points $(a_0, \lambda_0), (a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$.



Il s'agit de démontrer que l'application

$$\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto \big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\big)$$

est bijective.

Or cette application est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Il suffit donc de démontrer son injectivité.

Mais pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, la relation $\varphi(P) = 0$ signifie que les scalaires deux-à-deux distincts $a_0, \dots, a_n$ sont racines de P. Le polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, qui admet ainsi au moins $n+1$ racines, est nécessairement nul, ce qui achève le raisonnement.

Exercice 12

Question 1

L'application f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ par linéarité de la trace. Comme $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit donc de montrer que f est injective pour en déduire qu'elle est bijective.
Or si $f(M) = 0$ i.e. $M + (\operatorname{tr} M)A = 0$ alors, en prenant la trace de la relation on obtient $(\operatorname{tr} M)(1 + \operatorname{tr} A) = 0$ avec $1 + \operatorname{tr} A \neq 0$ d'où l'on tire $\operatorname{tr} M = 0$ puis en comparant à la relation initiale $M = 0$. L'application linéaire f est donc injective.

Exercice 12

Question 2.a

L'équation $f(M) = 0$ conduit à $M = -(\operatorname{tr} M)A \in \operatorname{Vect} A$. Réciproquement on a bien $f(A) = 0$ car $\operatorname{tr} A = -1$ par hypothèse. Le noyau de f est donc la droite de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dirigée par A : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} A$.

Exercice 12

Question 2.b

On note $H = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} M = 0\}$.
Pour $N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = f(N)$, un calcul immédiat montre que $\operatorname{tr} M = 0$ et l'on a donc l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset H$.
La réciproque est évidente : pour $M \in H$, $M = f(M) \in \operatorname{Im} f$. On peut aussi conclure par égalité des dimensions dans l'inclusion précédente : H est un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle et $\operatorname{Im} f$ est également un hyperplan d'après le théorème du rang puisque $\operatorname{Ker} f$ est une droite d'après **a.** :

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\operatorname{Ker} f) = n^2 - 1.$$

Exercice 12

Question 3

L'équation s'écrit $f(X) = B$. On distingue deux cas :

- Si $\operatorname{tr} A \neq -1$: partant de $f(X) = B$, on obtient
$$\operatorname{tr} X = \frac{\operatorname{tr} B}{1 + \operatorname{tr} A}$$
puis
$$X = B - (\operatorname{tr} X)A = B - \frac{\operatorname{tr} B}{1 + \operatorname{tr} A}A.$$
La réciproque est possible mais inutile puisque l'équation admet une (unique) solution d'après **1.** et que la précédente est la seule possible. En conclusion, dans le cas $\operatorname{tr} A \neq -1$, l'équation admet pour unique solution
$$X_0 = B - \frac{\operatorname{tr} B}{1 + \operatorname{tr} A}A.$$

- Si $\operatorname{tr} A = -1$: l'équation admet au moins une solution si, et seulement si, $B \in \operatorname{Im} f$ i.e. $\operatorname{tr} B = 0$. Dans ce cas, $X_0 = B$ est solution évidente puis, pour $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned} f(X) = B \quad &\iff \quad f(X) = f(X_0) \quad \iff \quad f(X - X_0) = 0 \\ &\iff \quad X - X_0 \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} A \\ &\iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, X = X_0 + \lambda A. \end{aligned}$$
Dans le cas où $\operatorname{tr} A = -1$ et $\operatorname{tr} B = 0$, les solutions de l'équation sont donc les matrices de la forme $X = B + \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 13

On montre aisément que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}(E)$:

- L'endomorphisme nul appartient à F : $0 \circ f = f \circ 0 = 0$ par linéarité de f.
- Étant donnés deux éléments g, h de F et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$(\lambda g + h) \circ f = \lambda g \circ f + h \circ f = 0$$
et de même
$$f \circ (\lambda g + h) = \lambda f \circ g + f \circ h = 0$$
par linéarité de f, si bien que $\lambda g + h \in F$.

Étant donné un endomorphisme g de E,
$$g \in F \quad \iff \quad g \circ f = f \circ g = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \\ \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f \end{cases}.$$
En notant $B = \operatorname{Ker} f$ et A' un supplémentaire de $A = \operatorname{Im} f$ dans E, les conditions précédentes deviennent :
$$g \in F \quad \iff \quad \begin{cases} g|_A = 0 \\ \operatorname{Im} g \subset B \end{cases}.$$
Une application linéaire sur E étant caractérisée par ses restrictions linéaires à A et A', choisir un élément g de F revient à choisir sa restriction à A', à valeurs dans B. Plus précisément, l'application $g \longmapsto (g|_A, g|_{A'})$ est un isomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ sur $\mathbf{L}(A, E) \times \mathbf{L}(A', E)$, qui envoie F sur $\{0\} \times \mathbf{L}(A', B) \simeq \mathbf{L}(A', B)$.
Puisqu'un isomorphisme préserve la dimension, on en déduit que
$$\dim F = \dim \mathbf{L}(A', B) = \dim A' \dim B = (n - \operatorname{rg} f)(\dim \operatorname{Ker} f) = (n - \operatorname{rg} f)^2$$
d'après le théorème du rang.

Exercice 14

D'après les hypothèses et la formule de Grassmann,
$$\begin{aligned} \dim E &= \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \\ &= \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Ker} v) - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) \end{aligned}$$
d'où, en sommant ces relations membre à membre,
$$\begin{aligned} 2 \dim E = \dim(\operatorname{Im} u) &+ \dim(\operatorname{Im} v) + \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Ker} v) \\ &- \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) \end{aligned}$$
c'est-à-dire, en vertu du théorème du rang,
$$\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) + \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = 0.$$
Il en ressort que $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = 0$ ou en d'autres termes que les sommes $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$ sont directes.

Exercice 15

Soit $\phi : \mathbb{M}_{5,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R}), X \longmapsto AX$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A.
Pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{5,1}(\mathbb{R})$, on a :
$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker} \phi \quad &\iff \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \\ &\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4}}{\iff} \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\iff} \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ -2x_1 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker} \phi \quad &\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_1 = \frac{5}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_2 = -x_4 - x_5 \end{cases} \\ &\iff \quad \exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2, X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b \\ -a - b \\ \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
On en déduit que les vecteurs ${}^t\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et ${}^t\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ forment une base de $\operatorname{Ker} \phi$.

L'image $\operatorname{Im} \phi \subset \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est engendrée par les colonnes $C_1, \ldots, C_5$ de la matrice A. En remarquant que
$$AX = 0 \quad \iff \quad x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 + x_4 C_4 + x_5 C_5 = 0,$$
on déduit de la résolution précédente les relations :
$$C_4 = -\frac{5}{2}C_1 + C_2 - \frac{1}{2}C_3 \quad \text{et} \quad C_5 = \frac{3}{2}C_1 + C_2 + \frac{3}{2}C_3.$$
Les vecteurs C_1, C_2 et C_3 suffisent donc à engendrer $\operatorname{Im} \phi$.

Par ailleurs, sachant $\operatorname{Ker} \phi$ de dimension 2, le théorème du rang donne :
$$\operatorname{rg} \phi = \dim \mathbf{M}_{5,1}(\mathbb{R}) - \dim(\operatorname{Ker} \phi) = 3,$$
et la famille (C_1, C_2, C_3), génératrice à 3 éléments de $\operatorname{Im} \phi$, en est donc une base.

Remarque. On pouvait aussi avancer que la famille (C_1, C_2, C_3), formée de 3 éléments de $\operatorname{Im} \phi$, est libre.

Exercice 16

Question 1

Les coordonnées du vecteur $Q_0 = f(P_0)$ dans la base canonique (i.e. les coefficients du polynôme) sont données par le vecteur

$$A\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}.$$

À son tour, le vecteur $f^2(P_0) = f(Q_0)$ a pour coordonnées

$$A\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\8\end{pmatrix}.$$

On en déduit que $f^2(P_0) - 6f(P_0)$ est représenté par

$$\begin{pmatrix}-4\\4\\8\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que :

$$f^2(P_0) - 6f(P_0) = 8(1 - X - 2X^2) = -8P_0.$$

Exercice 16

Question 2

Pour $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}) \quad &\iff \quad (f - 2\,\mathrm{id})(P) = 0 \quad \iff \quad (A - 2I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{cases} a - 3b + 2c = 0 \\ -a + 3b - 2c = 0 \\ -a + 3b - 2c = 0 \end{cases} \\
&\iff a = 3b - 2c \\
&\iff \exists!(u, v) \in \mathbb{R}^2, P = (3u - 2v) + uX + vX^2 \\
&\iff \exists!(u, v) \in \mathbb{R}^2, P = u(3 + X) + v(-2 + X^2).
\end{aligned}$$

Ainsi les polynômes $P_1 = 3 + X$ et $P_2 = -2 + X^2$ forment une base de $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.

De même,

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(f - 4\,\mathrm{id}) \quad &\iff \quad (A - 4I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{cases} -a - 3b + 2c = 0 \\ -a + b - 2c = 0 \\ -a + 3b - 4c = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} -a - 3b + 2c = 0 \\ 4b - 4c = 0 \\ 6b - 6c = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2}}{\iff} \begin{cases} -a - 3b + 2c = 0 \\ b - c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -c \\ b = c \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi $P \in \operatorname{Ker}(f - 4\,\mathrm{id})$ si, et seulement si,

$$\exists! u \in \mathbb{R}, \quad P = -u + uX + uX^2 = u(-1 + X + X^2).$$

Il en ressort que le sous-espace $\operatorname{Ker}(f - 4\,\mathrm{id})$ est la droite dirigée par le vecteur $P_3 = -1 + X + X^2$.

Exercice 16

Question 3

En base canonique, l'endomorphisme $f^2 - 6f + 8\,\mathrm{id}$ est représenté par la matrice $A^2 - 6A + 8I_3$, dont le calcul montre qu'elle est nulle. On a donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f^2(P) = 6f(P) - 8P.$$

Remarque. Ce résultat peut également être justifié en observant que l'endomorphisme

$$f^2 - 6f + 8\,\mathrm{id} = (f - 4\,\mathrm{id}) \circ (f - 2\,\mathrm{id}) = (f - 2\,\mathrm{id}) \circ (f - 4\,\mathrm{id})$$

est nul sur chacun des sous-espaces $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(f - 4\,\mathrm{id})$, qui sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$ comme on le voit aisément à partir des résultats de la question **2.**. Cet endomorphisme est donc nul (sur $\mathbb{R}_2[X]$).

Exercice 18

Question 1

Évident.

Exercice 18

Question 2

Par analogie avec la numérotation de la base canonique $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, on numérotera les lignes et les colonnes de $A \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de 0 à n.

Pour $j \in [\![0, n]\!]$, la formule du binôme donne :

$$\varphi(X^j) = (X + a)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^{j-i} X^i.$$

La matrice A a donc pour coefficient générique

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i} a^{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 18
Question 3

L'endomorphisme f est inversible, d'inverse $g : P(X) \longmapsto P(X-a)$. La matrice A est donc inversible et admet pour inverse la matrice B représentative de g en base canonique, de coefficient générique

$$\beta_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i}(-a)^{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

elle aussi triangulaire supérieure.

Exercice 18
Question 4

On applique dans cette question les résultats précédents pour $a = 1$. La matrice AB a alors pour coefficient d'indice (p, q), $p < q$:

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{p,k}\beta_{k,q} = \sum_{k=p}^{q} (-1)^{q-k}\binom{k}{p}\binom{q}{k},$$

qui par ailleurs est nul puisque $AB = I_n$.

Exercice 19
Question 1

La matrice de passage de $\underline{e}$ à $\underline{e}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où la matrice représentative de f dans les bases $\underline{e}'$ et $\underline{\varepsilon}$:

$$B = AP = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19
Question 2

La matrice de passage de $\underline{\varepsilon}$ à $\underline{\varepsilon}'$ est :

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible (ce qui confirme que $\underline{\varepsilon}'$ est une base) avec :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire f est donc représentée, en bases $\underline{e}'$ et $\underline{\varepsilon}'$, par la matrice :

$$C = Q^{-1}B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -22 \\ -2 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de changement de base, il s'agit de démontrer qu'il existe une base $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle ϕ soit représenté par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela revient à trouver trois vecteurs linéairement e_1, e_2 et e_3 indépendants de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{cases} \phi(e_1) = 0 \\ \phi(e_2) = e_1 \\ \phi(e_3) = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Le vecteur e_1 appartient nécessairement à $\operatorname{Im}\phi = \mathbb{R}(1, -3, -2)$. On peut prendre par exemple $e_1 = (1, -3, -2)$. Il apparaît ensuite sur la matrice A que $\phi(1, 0, 0) = e_1$ et l'on peut donc poser $e_2 = (1, 0, 0)$. Enfin, il s'agit de déterminer un vecteur e_3 de $\operatorname{Ker}\phi$, linéairement indépendant de e_1. Le sous-espace $\operatorname{Ker}\phi$ a pour équation $x + y - z = 0$ et l'on peut donc par exemple poser $e_3 = (1, 0, 1)$.

Les vecteurs e_1, e_2 et e_3 ainsi construits satisfont les conditions $(*)$. Par ailleurs, (e_1, e_3) est libre par construction et e_2 n'appartient pas au sous-espace $\operatorname{Vect}(e_1, e_3) = \operatorname{Ker} f$ puisqu'il ne satisfait pas son équation. La famille (e_1, e_2, e_3) est donc libre.

En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique à $\underline{e}$, la formule de changement de base assure donc que $P^{-1}AP = B$.

Exercice 21

Étant donné une matrice inversible

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{Gl}_2(\mathbb{R}),$$

on a équivalence entre $P^{-1}AP = B$ et $AP = PB$. Or

$$\begin{aligned}
AP = PB \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ 8a+c & 8b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16a+232b & -a-15b \\ 16c+232d & -c-15d \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 16a + 232b - c = 0 \\ a + 15b + d = 0 \\ 8a - 15c - 232d = 0 \\ 8b + c + 16d = 0 \end{cases} \\
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 15L_4}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} 16a + 240b + 16d = 0 \\ a + 15b + d = 0 \\ 8a + 120b + 8d = 0 \\ 8b + c + 16d = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP = B \quad & \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 16L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ a + 15b + d = 0 \\ 0 = 0 \\ 8b + c + 16d = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = -15b - d \\ c = -8b - 16d \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} -15b - d & b \\ -8b - 16d & d \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad P = b\begin{pmatrix} -15 & 1 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -16 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, il reste à déterminer les matrices inversibles parmi les précédentes. Or $P(b,d)$ a pour déterminant

$$bd - d^2 + 8b^2 = -\left(d - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}b^2,$$

qui est non nul si, et seulement si, $(b,d) \neq \{(0,0)\}$.
En conclusion, les matrices P inversibles telles que $P^{-1}AP = B$ sont les matrices

$$P(b,d) = \begin{pmatrix} -15b - d & b \\ -8b - 16d & d \end{pmatrix}, \quad (b,d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Puisqu'il en existe, les matrices A et B sont donc semblables.

Exercice 23

Il vient $u(1) = 1$, $u(X) = X + 1$ et $u(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$, d'où la matrice représentative de u en base canonique :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et de même celle de v :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $u + kv$ est donc représenté en base canonique par la matrice $U + kV$, si bien que :

$$\operatorname{rg}(u + kv) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1+k & 1-k & 1+k \\ 0 & 1+k & 2(1-k) \\ 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}.$$

- Pour $k \neq -1$, la matrice $U + kV$ est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls ; elle est donc inversible, c'est-à-dire de rang 3.
- Pour $k = -1$,

$$U + kV = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  est de rang 2.

En conclusion,

$$\operatorname{rg}(u + kv) = \begin{cases} 3 & \text{si } k \neq -1 \\ 2 & \text{si } k = -1 \end{cases}.$$

Exercice 24

Si de telles matrices A et B existaient, on aurait d'une part $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr} I_n = n$ et d'autre part, d'après les propriétés de la trace,

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0,$$

ce qui est absurde.

Il n'existe donc aucun couple de matrices $(A,B) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$.

Exercice 25

Question 1

Si A et A' sont les matrices représentatives de f dans des bases $\underline{e}$ et $\underline{e}'$, alors elles sont semblables d'après la formule de changement de base : on a $A' = P^{-1}AP$ si P désigne la matrice de passage de $\underline{e}$ à $\underline{e}'$.
On a alors, d'après les propriétés de la trace :

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}\big(P^{-1}(AP)\big) = \operatorname{tr}\big((AP)P^{-1}\big) = \operatorname{tr} A.$$

Il est donc correct de définir

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}\big(\operatorname{Mat}(f; \underline{e})\big)$$

puisque le membre de droite ne dépend pas du choix de la base $\underline{e}$.

Exercice 25

Question 2

Soit p un projecteur. D'après le cours, les sous-espaces $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E. Dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, c'est-à-dire constituée de r vecteurs $e_1, \dots, e_r$ formant une base de F et de $n - r$ vecteurs $e_{r+1}, \dots, e_n$ formant une base de G, le projecteur p est représenté par la matrice par blocs

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}).$$

D'après la définition précédente, on a donc $\operatorname{tr} p = \operatorname{tr} A = r$, c'est-à-dire $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$ puisque $r = \dim F = \dim(\operatorname{Im} p) = \operatorname{rg} p$.

Exercice 26

On remarque facilement que G est la droite de $\mathbb{R}^n$ engendrée par le vecteur $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)$. Il s'agit donc de démontrer, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ donné, qu'il existe un unique couple $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times H$ tel que $x = \lambda\mathbb{1} + y$. On raisonne pour cela par analyse-synthèse.

Analyse

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in H$ tels que $x = \lambda\mathbb{1} + y$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda + y_i) = n\lambda + \sum_{i=1}^n y_i = n\lambda$$

puisque $y \in H$, d'où

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \quad \text{puis} \quad y = x - \lambda\mathbb{1}$$

sont imposés. Ceci établit l'unicité du couple (λ, y) et fournit un candidat pour la synthèse.

Synthèse

Réciproquement, soient

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad y = x - \lambda\mathbb{1}.$$

On vérifie sans difficulté que :

- $y \in H$:

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda = 0$$

- et bien sûr $\lambda\mathbb{1} + y = x$...

L'existence de la décomposition est donc établie, ce qui achève le raisonnement.

Exercice 27

La restriction de f à H est une application linéaire de H dans F, dont l'image est incluse dans $\operatorname{Im} f$. Elle induit donc une application linéaire $\widetilde{f} : H \longrightarrow \operatorname{Im} f$ (définie par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in H$). On va montrer que $\widetilde{f}$ est un isomorphisme.

- On a $\operatorname{Ker} \widetilde{f} = (\operatorname{Ker} f) \cap H$. En effet, un élément $x \in E$ appartient à $\operatorname{Ker} \widetilde{f}$ si, et seulement si, $x \in H$ et $\widetilde{f}(x) = 0$, mais $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in H$...
  Comme $\operatorname{Ker} f$ et H sont supplémentaires par hypothèse, on a donc $\operatorname{Ker} \widetilde{f} = \{0\}$ ce qui assure l'injectivité de $\widetilde{f}$.
- Pour $y \in \operatorname{Im} f$ donné, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Décomposant cet élément x selon la somme $E = H + \operatorname{Ker} f$, il vient $x = x' + x''$ pour $(x', x'') \in H \times \operatorname{Ker} f$. On a alors $y = f(x) = f(x') = \widetilde{f}(x')$. Ainsi la fonction $\widetilde{f}$ est surjective.

Exercice 28

Question 1

Évident !

Exercice 28

Question 2.a

On commence, pour $P \neq 0$, par déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P.

On envisage dans un premier temps le cas d'un monôme $P = X^k$, $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas,

$$\varphi(X^k) = (X+1)^k + X^k = 2X^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$$

d'après la formule du binôme. Il apparaît donc que $\varphi(X^k)$ est de degré k.

De retour au cas général d'un polynôme $P \neq 0$ de degré n :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \quad \text{avec } a_n \neq 0.$$

Par linéarité,

$$\varphi(P) - a_n \varphi(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi(X^k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

d'après le cas précédent d'où, puisque $a_n\varphi(X^n)$ est de degré $n > n-1$ puisque $a_n \neq 0$, $\varphi(P)$ est de degré n.

Il en ressort en particulier que pour $P \neq 0$, le polynôme $\varphi(P)$ est non nul. Par contraposée, on en déduit que $\varphi(P) = 0$ implique $P = 0$. Ainsi l'application linéaire φ est injective.

Exercice 28

Question 2.b

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg \varphi(P) \leqslant \deg P \leqslant n$ si bien que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est φ-stable et φ induit donc sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme

$$\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \longmapsto P(X+1) + P(X).$$

De l'injectivité de φ découle celle de φ_n. Comme de plus φ_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il est alors automatiquement surjectif.

Exercice 28

Question 2.c

Étant donné un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (par exemple $n = \deg Q$ si $Q \neq 0$). Il existe alors, d'après **b.**, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \varphi_n(P) = \varphi(P)$. Ainsi l'endomorphisme φ est surjectif. C'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ d'après **a.**.

Exercice 28

Question 3.a

L'ensemble H est un sous-espace vectoriel et plus précisément un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$ comme noyau de la forme linéaire $P \longmapsto P(0)$. De même pour $H_n = H \cap \mathbb{R}_n[X]$ comme intersection de sous-espaces vectoriels.

Exercice 28

Question 3.b

On envisage dans un premier temps le cas d'un monôme $P = X^k$, $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas,

$$\psi(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$$

d'après la formule du binôme. Il apparaît donc que $\psi(X^k)$ est de degré k si $k \geqslant 1$ et nul si $k = 0$. On peut préciser que pour $k \geqslant 1$, le polynôme $\psi(X^k)$ a pour coefficient dominant $\operatorname{dom} \psi(X^k) = k$.

De retour au cas général d'un polynôme $P \neq 0$ de degré $n \geqslant 1$:
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \quad \text{avec } a_n \neq 0.$$
Par linéarité,
$$\psi(P) - a_n\psi(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \psi(X^k) \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$
d'après le cas précédent d'où, puisque $a_n\psi(X^n)$ est de degré $n-1 > n-2$ puisque $a_n \neq 0$, $\psi(P)$ est de degré $n-1$.

En conclusion,
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \deg \psi(P) = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } \deg P \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } \deg P \leqslant 0 \end{cases}.$$
On peut ajouter dans le cas où $n = \deg P \geqslant 1$ que :
$$\operatorname{dom} \psi(P) = \operatorname{dom} P \operatorname{dom} \psi(X^n) = n \operatorname{dom} P = (\deg P)(\operatorname{dom} P).$$

Exercice 28
Question 3.c

Il résulte immédiatement de l'analyse menée en **b.** que $\psi(P) = 0$ si, et seulement si, $\deg P \leqslant 0$ si bien que $\operatorname{Ker} \psi = \mathbb{R}_0[X]$.

Exercice 28
Question 3.d

Comme H est un hyperplan, tout vecteur non nul n'appartenant pas à H engendre une droite supplémentaire de H dans $\mathbb{R}[X]$. C'est le cas du polynôme constant 1 qui engendre la droite $\mathbb{R}_0[X] = \operatorname{Ker} \psi$, laquelle est donc supplémentaire de H dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour redémontrer ce résultat (qui n'est pas explicitement au programme) dans le cas considéré, on procède par analyse-synthèse, étant donné $P \in \mathbb{R}[X]$, pour justifier l'existence d'une unique décomposition $P = Q + R$ avec $Q \in H$ et $R \in \mathbb{R}_0[X]$. On obtient sans difficulté $P = \big(P - P(0)\big) + P(0)$ avec $P - P(0) \in H$ et $P(0)$ constant.

Par application du théorème noyau-image (exercice 27, à redémontrer dans la situation présente) puisque H est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \psi$, l'application ψ induit un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} \psi$.

Exercice 28
Question 3.e

On suit la méthode utilisée en **2.**.

La question **b.** assure, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, que ψ stabilise le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ et y induit un endomorphisme ψ_n de noyau $\operatorname{Ker} \psi_n = \operatorname{Ker} \psi \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X]$ et d'image $\operatorname{Im} \psi_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or, d'après le théorème du rang,
$$\operatorname{rg} \psi_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim(\operatorname{Ker} \psi_n) = (n+1) - 1 = n.$$
On a ainsi égalité des dimensions dans la dernière inclusion, qui est donc une égalité : $\operatorname{Im} \psi_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Dans ces conditions, étant donné $Q \in \mathbb{R}[X]$, en choisissant $n \geqslant 1 + \deg Q$, on peut écrire $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \operatorname{Im} \psi_n$, d'où l'existence de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \psi_n(P) = \psi(P)$, ce qui établit la surjectivité de ψ.

Exercice 28
Question 4

Des questions **3.d.** et **3.e.**, on déduit que ψ induit un isomorphisme θ de H sur $\mathbb{R}[X]$. La suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \theta^{-1}(U_{n-1})$ vérifie alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \in H$ i.e. $U_n(0) = 0$ et $U_{n-1} = \theta(U_n) = \psi(U_n)$ c'est-à-dire $U_{n-1}(X) = U_n(X+1) - U_n(X)$.

D'après les propriétés de ψ établies à la question **3.b.**, on obtient :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} \deg U_{n-1} = \deg U_n - 1 \\ \operatorname{dom} U_{n-1} = (\deg U_n)(\operatorname{dom} U_n) \end{cases}$$
si bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme U_n est de degré n et a pour coefficient dominant $\frac{1}{n!}$.

Exercice 28
Question 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, la famille $(U_0, U_1, \dots, U_n)$ est formée de polynômes non nuls et de degrés deux-à-deux distincts d'après la question **4.**. C'est donc une famille libre à $n+1$ éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, c'est-à-dire une base de cet espace.

Exercice 28
Question 6

La bijectivité de l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même, établie à la question **2.c.**, justifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un unique polynôme P_n tel que $\varphi(P_n) = 2X^n$.

Exercice 28
Question 7.a

Pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $Q_n = (-1)^n P_n(1-X)$ vérifie :
$$Q_n(X+1) + Q_n(X) = (-1)^n\big(P_n(-X) + P_n(1-X)\big) = (-1)^n 2(-X)^n = 2X^n$$
i.e. $\varphi(Q_n) = 2X^n$. Il en ressort par injectivité de φ que $Q_n = P_n$ i.e.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Exercice 28

Question 7.b

Pour $n = 2k$ pair, la relation de la question **a.** appliquée en $x = 0$ met en évidence que $P_{2k}(0) = P_{2k}(1)$. D'après la relation $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$ spécialisée en 0, on obtient alors $P_{2k}(0) = P_{2k}(1) = 0$.

Pour $n = 2k+1$ impair, la relation de la question **a.** appliquée en $x = \frac{1}{2}$ montre que $P_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$.

Exercice 28

Question 7.c

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant la relation

$$P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n,$$

il vient :

$$P_n'(X+1) + P_n'(X) = n2X^{n-1}$$

si bien que $\varphi(\frac{1}{n}P_n') = 2X^{n-1}$ et, par injectivité de φ, $\frac{1}{n}P_n' = P_{n-1}$ i.e. $P_n' = nP_{n-1}$.

Exercice 28

Question 7.d

On obtient $P_0 = 1$ par définition d'où l'on déduit successivement, en utilisant les questions **b.** et **c.**, les polynômes

$$P_1 = X - \frac{1}{2} \qquad P_2 = X^2 - X \qquad P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{4}$$
$$P_4 = X^4 - 2X^3 + X \qquad P_5 = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}.$$

Exercice 29

Pour commencer, on vérifie rapidement que le plan P d'équation $x + y + 2z = 0$ et la droite D dirigée par $(1, 2, 1)$ sont supplémentaires : leur somme est directe puisque $(1, 2, 1) \notin P$ et égale à $\mathbb{R}^3$ car $\dim P + \dim D = 3$.

Dans une base $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ adaptée à la décomposition $P \oplus D = \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire composée de deux vecteurs e_1, e_2 formant une base de P et d'un vecteur e_3 formant une base de D, le projecteur π sur P parallèlement à D est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut par exemple considérer la base de P formée des vecteurs $e_1 = (1, -1, 0)$ et $e_2 = (2, 0, -1)$, et bien sûr le vecteur $e_3 = (1, 2, 1)$ qui forme une base de D.

En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique à la base $\underline{e}$, la formule de changement de base donne la matrice B représentative de π en base canonique :

$$B = PAP^{-1}.$$

Reste à calculer P^{-1}. Pour cela, étant donné $Y = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on résoud le système d'inconnue $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$PX = Y \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + 2x_3 = y_2 \\ -x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = y_1 + y_2 \\ -x_1 + 2x_3 = y_2 \\ -x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}{\iff} \begin{cases} 5x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3 \\ -x_1 + 2x_3 = y_2 \\ -x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_3 = \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + 2y_3) \\ x_1 = \frac{1}{5}(2y_1 - 3y_2 + 4y_3) \\ x_2 = \frac{1}{5}(y_1 + y_2 - 3y_3) \end{cases}$$

On obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

puis

$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice de la composée $5\,\mathrm{id} \circ \pi = 5\pi$ est alors bien sûr

$$5B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 31

Question 1

On a :

$$\begin{aligned} p \circ q = q &\iff (p - \mathrm{id}_E) \circ q = 0 \\ &\iff \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \\ &\iff \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p \end{aligned}$$

car $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\, p$ étant donné que p est un projecteur.

Exercice 31

Question 2

Il vient de même :

$$\begin{aligned} p\circ q = p &\iff p\circ(q-\mathrm{id}_E)=0\\ &\iff \mathrm{Im}(q-\mathrm{id}_E)\subset \operatorname{Ker} p\\ &\iff \operatorname{Ker} q\subset \operatorname{Ker} p \end{aligned}$$

car $\mathrm{Im}(q-\mathrm{id}_E)=\mathrm{Im}\, q' = \operatorname{Ker}(q'-\mathrm{id}_E)=\operatorname{Ker} q$ étant donné que $q'=\mathrm{id}_E - q$ est un projecteur (le projecteur associé à q).

Exercice 32

On raisonne par double implication.

1. On suppose que $u\circ p = p\circ u$.
   - Si $x\in\operatorname{Ker} p$, alors $p(u(x)) = u(p(x)) = u(0) = 0$ si bien que $u(x)\in\operatorname{Ker} p$. Le sous-espace $\operatorname{Ker} p$ est donc stable par u.
   - Si $y\in\mathrm{Im}\, p$, alors il existe $x\in E$ (par exemple $x=y$) tel que $y=p(y)$ et on a donc $u(y)=u(p(x))=p(u(x))\in\mathrm{Im}\, p$, ce qui établit la stabilité de $\mathrm{Im}\, p$ par u.

2. On suppose que les sous-espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont stables par u.
   - Pour $x\in\operatorname{Ker} p$, on a $u(p(x)) = u(0) = 0$ mais aussi $p(u(x)) = 0$ puisque $u(x)\in\operatorname{Ker} p$ par stabilité de ce dernier.
   - Pour $x\in\mathrm{Im}\, p = \operatorname{Ker}(p-\mathrm{id})$, on a $p(x)=x$ donc $u(p(x)) = u(x)$ mais aussi $p(u(x)) = u(x)$ car $u(x)\in\mathrm{Im}\, p = \operatorname{Ker}(p-\mathrm{id})$ par stabilité.

   Comme on vient de le voir, les applications linéaires $u\circ p$ et $p\circ u$ coïncident sur les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\mathrm{Im}\, p$. Comme ces derniers sont supplémentaires dans E puisque p est un projecteur, on en déduit que l'égalité $u\circ p = p\circ u$ est valable sur E tout entier.

Exercice 34

Question 1

On vérifie sans peine que si A et B sont deux matrices magiques alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, la matrice $\lambda A + B$ est encore magique : les sommes de ses coefficients sur chaque ligne/colonne/rangée sont toutes égales à $\lambda\tau_A+\tau_B$ d'où $\tau_{\lambda A+B}=\lambda\tau_A+\tau_B$. Cela établit à la fois que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ et que l'application τ est linéaire.

Remarque. L'application τ est la restriction à $\mathcal{M}$ de l'application trace.

Exercice 34

Question 2

On s'assure déjà que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$.

On note $\mathbb{1}$ la matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 ; par définition, cette matrice dirige la droite G.

Il s'agit de montrer, pour $M\in\mathcal{M}$ donnée, qu'il existe un unique triplet $(S_0,A,\alpha)\in E\times F\times\mathbb{K}$ tel que $M=S_0+A+\alpha\mathbb{1}$. On procède pour cela par analyse-synthèse.

Analyse

Si $(S_0,A,\alpha)\in E\times F\times\mathbb{K}$ est tel que

$$M = S_0 + A + \alpha\mathbb{1}, \qquad (\star)$$

alors en prenant la trace des deux membres, on obtient $\operatorname{tr} M = n\alpha$ car une matrice antisymétrique est de trace nulle ; on a donc nécessairement $\alpha = (\operatorname{tr} M)/n$. Puis, en écrivant $(\star)$ et l'équation obtenue en transposant les deux membres, on obtient

$$\begin{cases} M = S_0 + A + \alpha\mathbb{1}\\ {}^tM = S_0 - A + \alpha\mathbb{1}\end{cases},$$

qui est un système linéaire en (S_0,A) que l'on résoud sans peine :

$$S_0 = \frac{1}{2}(M+{}^tM)-\alpha\mathbb{1}, \qquad A=\frac{1}{2}(M-{}^tM),$$

ce qui termine l'analyse, prouve l'unicité de la décomposition de M et fait apparaître un candidat pour la synthèse.

Synthèse

Soient S_0, A et α définis par les formules précédentes :

$$S_0=\frac{1}{2}({}^tM+M)-\frac{\operatorname{tr} M}{n}\mathbb{1}, \qquad A=\frac{1}{2}(M-{}^tM) \qquad \text{et} \qquad \alpha=\frac{\operatorname{tr} M}{n}.$$

On vérifie que :

- $S_0\in E$: S_0 est magique car $\mathcal{M}$ est un sous-espace, elle est clairement symétrique (${}^tS_0=S_0$) et
$$\operatorname{tr} S_0 = \operatorname{tr} M - \frac{\operatorname{tr} M}{n}\operatorname{tr}\mathbb{1} = 0\,;$$
- $A\in F$: A est magique car $\mathcal{M}$ est un sous-espace, et clairement antisymétrique (${}^tA=-A$) ;
- et bien sûr $S_0+A+\alpha\mathbb{1}=M$.

Ceci prouve l'existence de la décomposition de M.

Exercice 37

Question 1

Les homothéties $f=\lambda\,\mathrm{id}_E$, $\lambda\in\mathbb{K}$, commutent avec tous les endomorphismes de E.

Exercice 37

Question 2

On fixe une base $\underline{e}$ de E. Soient f un endomorphisme de E satisfaisant $(*)$ et A la matrice qui le représente en base $\underline{e}$. Pour un endomorphisme g de E représenté en base $\underline{e}$ par une matrice B, les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ sont respectivement représentés en base $\underline{e}$ par les matrices AB et BA. La condition $(*)$ portant sur f s'écrit donc :

$$\forall B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}), \qquad AB = BA. \tag{$**$}$$

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \sum_{i,j} a_{i,j} E_{i,j}$ la décomposition de A sur la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell} \qquad \text{où} \qquad \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

En effet, si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ désigne la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $E_{k,\ell}\varepsilon_p = 0$ si $p \neq \ell$ et $E_{k,\ell}\varepsilon_\ell = \varepsilon_k$ de sorte que $E_{i,j}E_{k,\ell}\varepsilon_\ell = \delta_{j,k}\varepsilon_i$. Ainsi $E_{i,j}E_{k,\ell}\varepsilon_p = \delta_{j,k}E_{i,\ell}\varepsilon_p$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, d'où l'on déduit l'égalité matricielle $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

Dès lors, pour tous $k, \ell \in [\![1, n]\!]$,

$$AE_{k,\ell} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} E_{i,j} E_{k,\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} E_{i,\ell}$$

et

$$E_{k,\ell} A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} E_{k,\ell} E_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell,j} E_{k,j}$$

d'où, d'après $(**)$,

$$a_{k,k} = a_{\ell,\ell} \qquad \text{et} \qquad k \neq \ell \implies a_{k,\ell} = 0.$$

La matrice A est donc scalaire, i.e. de la forme $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Il en résulte que l'endomorphisme f est une homothétie de E et l'on peut donc conclure d'après **1.** que les endomorphismes de E satisfaisant la condition $(*)$ sont les homothéties.

Exercice 37

Question 3.a

Un sens est trivial : si f est l'homothétie de rapport λ, alors pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, f(x)\big) = (x, \lambda x)$ est liée.

Réciproquement si, pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée alors, pour tout $x \neq 0$ existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$ (car $x \neq 0$) et il s'agit de démontrer que ce scalaire λ_x ne dépend pas de x.
Soient donc x et y deux vecteurs non nuls de E. Pour montrer que $\lambda_x = \lambda_y$, on distingue deux cas :

- si la famille (x, y) est liée, alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$ (car $x \neq 0$). On a alors
$$f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$$
mais aussi
$$f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x.$$
Comme $x \neq 0$ et $\mu \neq 0$, on en déduit que $\lambda_y \mu = \mu \lambda_x$ puis que $\lambda_y = \lambda_x$.

- sinon, on écrit :
$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y.$$
En comparant à :
$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y,$$
et sachant que la famille (x, y) est libre (c'est ce qui autorise l'identification), on en déduit que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

On a donc $f(x) = \lambda_x x = \lambda x$ pour tout $x \in E$ ce qui prouve que f est l'homothétie de E de rapport λ.

Exercice 37

Question 3.b

Soit f un endomorphisme de E satisfaisant $(*)$. Pour montrer que f est une homothétie, il suffit d'après **a.** de montrer que la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée pour tout $x \in E$.
Or, pour $x \in E$ donné non nul, f commute par hypothèse avec la symétrie σ_x par rapport à la droite engendrée par x parallèlement à un supplémentaire quelconque.
On a donc $\sigma_x\big(f(x)\big) = f\big(\sigma_x(x)\big) = f(x)$. Le vecteur $f(x)$ est ainsi invariant par σ_x et donc colinéaire à x, d'où le résultat.
On retrouve la conclusion obtenue en **2.**.

Exercice 38

Question 1

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ scalaires tels que

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 f^2(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0. \tag{$*$}$$

En composant par f^{p-1}, on obtient $\lambda_0 f^{p-1}(x_0) = 0$ d'où $\lambda_0 = 0$ puis, en composant $(*)$ par f^{p-2}, $\lambda_1 f^{p-1}(x_0) = 0$ d'où $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite.
Plutôt que de rédiger une récurrence, on peut aussi raisonner par l'absurde : si la famille $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1})$ n'est pas nulle, soit $v \in [\![0, p-1]\!]$ le plus petit indice tel que $\lambda_v \neq 0$. En composant $(*)$ par f^{p-1-v}, on obtient alors $\lambda_v f^{p-1}(x_0) = 0$ d'où $\lambda_v = 0$, ce qui est absurde.
Ainsi la famille $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ est nulle et la famille $\big(f^i(x_0)\big)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ est libre.

Exercice 38

Question 2

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, le théorème du rang appliqué à f^j donne $\dim(\operatorname{Ker} f^j) = n - \operatorname{rg} f^j$.
Or, d'après la question **1.**, $\operatorname{rg} f^j$ est le rang de la famille

$$\Big(f^j(x_0), f^j\big(f(x_0)\big), \ldots, f^j\big(f^{n-1-j}(x_0)\big), f^j\big(f^{n-j}(x_0)\big), \ldots, f^j\big(f^{n-1}(x_0)\big)\Big),$$

qui s'écrit encore :

$$\big(f^j(x_0), f^{j+1}(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0), 0, \ldots, 0\big).$$

D'après la question **1.**, cette famille est de rang $n - j$ si bien que $\dim(\operatorname{Ker} f^j) = j$.

Exercice 38

Question 3

L'endomorphisme f induit sur le sous-espace stable F un endomorphisme g nilpotent. Il résulte alors de la question **1.** que $g^d = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in F$, $f^d(x) = g^d(x) = 0$ et l'on a donc $F \subset \operatorname{Ker} f^d$. Comme on a par ailleurs égalité des dimensions d'après **2.**, cette inclusion est une égalité : $F = \operatorname{Ker} f^d$.