

**Travaux dirigés**  
Vecteurs aléatoires discrets

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      1 / 89

Exercice 1      Q 1

### Exercice 1

Question 1

Les 4 réels  $p_{i,j} = P(X = i, Y = j)$ ,  $i, j \in \{0, 1\}$ , définissent la loi conjointe d'un couple  $(X, Y)$  si, et seulement si :

$$\begin{cases} p_{0,0} \geq 0, p_{0,1} \geq 0, p_{1,0} \geq 0, p_{1,1} \geq 0 \\ p_{0,0} + p_{0,1} + p_{1,0} + p_{1,1} = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire, avec les formules de l'énoncé,  $p \in [0, \frac{1}{3}]$ .

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      2 / 89

Exercice 1      Q 2

### Exercice 1

Question 2

De la loi conjointe du couple  $(X, Y)$ , on déduit les lois de  $X$  et  $Y$  :

$X \setminus Y$	0	1	Loi de $X$
0	$\frac{1}{6} + p$	$\frac{1}{2} - p$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{3} - p$	$p$	$\frac{1}{3}$
Loi de $Y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Ainsi  $X$  et  $Y$  suivent respectivement des lois de Bernoulli de paramètres  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{2}$ .

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      3 / 89

Exercice 1      Q 3

### Exercice 1

Question 3

À partir de la loi conjointe du couple  $(X, Y)$  à nouveau, on obtient la loi de la variable  $X + Y$ , à valeurs dans  $\{0, 1, 2\}$  :

$$P(X + Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{6} + p,$$

$$P(X + Y = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{5}{6} - 2p,$$

$$P(X + Y = 2) = P(X = 1, Y = 1) = p.$$

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      4 / 89

Exercice 1      Q 4

### Exercice 1

Question 4

On obtient de même la loi de  $XY$  : la variable est à valeurs dans  $\{0, 1\}$  donc suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$P(XY = 1) = P(X = 1, Y = 1) = p.$$

On est alors en mesure de calculer

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = p - \frac{1}{6}.$$

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      5 / 89

Exercice 1      Q 5

### Exercice 1

Question 5

D'après 4., il est nécessaire que  $p = \frac{1}{6}$  pour que les variables  $X$  et  $Y$  soient indépendantes.

Réciproquement, pour  $p = \frac{1}{6}$ , la loi conjointe de  $(X, Y)$  est donnée par :

$X \setminus Y$	0	1	Loi de $X$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
Loi de $Y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

et l'on vérifie sur ce tableau que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :

$$\forall i, j \in \{0, 1\}, \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j).$$

En conclusion, les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, et seulement si,  $p = \frac{1}{6}$ .

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      6 / 89

Exercice 2      Q 1

### Exercice 2

Question 1

Puisque  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on a :

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + a^n}{n!} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{e}{4} + \frac{e^a}{4}$$

d'où l'on déduit la valeur de  $a = \ln(4 - e)$ .

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      7 / 89

Exercice 2      Q 2

### Exercice 2

Question 2

Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n P(X = n) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1 + a^n}{n!} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + a^n}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \frac{a}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \frac{a}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{e}{4} + \frac{a}{4} e^a. \end{aligned}$$

La série ci-dessus étant absolument convergente par opérations sur les séries exponentielles, absolument convergentes. On en déduit l'existence de

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n P(X = n) = \frac{e}{4} + \left(1 - \frac{e}{4}\right) \ln(4 - e).$$

www.rhbd.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      8 / 89

Exercice 2 Q 3

### Exercice 2

Question 3

Les variables  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, la loi de leur somme est donnée par le produit de convolution :  $X + Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  avec, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = n) &= \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i+j=n}} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = n - i) \\ &= \frac{1}{16} \sum_{i=0}^n \frac{1 + a^i}{i!} \frac{1 + a^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{16n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1 + a^i + a^{n-i} + a^n) \\ &= \frac{1}{16n!} (2^n + 2(1+a)^n + (2a)^n) \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

*Remarque.* On peut vérifier que  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X + Y = n) = 1$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 9 / 89

Exercice 3

### Exercice 3

Pour  $x \geq 0$  et  $y \geq 1$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y-1 \\ y-1 & x \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si,  $x^2 - (y-1)^2 \neq 0$  i.e.  $x \neq y-1$ .

En notant  $B$  l'événement « la matrice aléatoire  $A$  est inversible », on a donc

$$\bar{B} = [X = Y - 1] = \bigcup_{k \geq 0} [X = k] \cap [Y = k + 1]$$

où l'union est disjointe, si bien que, par indépendance de  $X$  et  $Y$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k + 1) \\ &= 1 - pe^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (1-p)^k}{k!} = 1 - pe^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 10 / 89

Exercice 4 Q 1

### Exercice 4

Question 1

La variable  $X + Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Compte-tenu de l'indépendance de  $X$  et  $Y$ , la loi de  $X + Y$  est donnée par le produit de convolution de celles de  $X$  et  $Y$  : pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j=k}} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k p q^i p q^{k-i} = (k+1) p^2 q^k. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 11 / 89

Exercice 4 Q 2

### Exercice 4

Question 2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Conditionnellement à l'événement  $[X + Y = n]$ , la variable  $X$  est à valeurs dans  $[0, n]$  avec, par  $\mathbb{P}$ -indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$\begin{aligned} \forall i \in [0, n], \quad \mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X = i) &= \frac{\mathbb{P}(X = i, X + Y = n)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = i, Y = n - i)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = n - i)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Conditionnellement à  $[X + Y = n]$ , la variable  $X$  suit donc la loi uniforme sur  $[0, n]$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 12 / 89

Exercice 4 Q 3.a

### Exercice 4

Question 3.a

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , l'indépendance de  $X$  et  $Y$  amène :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M \geq k) &= \mathbb{P}(X \geq k, Y \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k) \mathbb{P}(Y \geq k) \\ &= \left( \sum_{i=k}^{\infty} p q^i \right)^2 = \left( p \frac{q^k}{1-q} \right)^2 = q^{2k}. \end{aligned}$$

Par suite, pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \geq k) - \mathbb{P}(M \geq k+1) = (1 - q^2) q^{2k}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 13 / 89

Exercice 4 Q 3.b

### Exercice 4

Question 3.b

La variable  $V$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , son signe indiquant laquelle des variables  $X$  et  $Y$  est égale à  $M$ .

Pour  $h \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M = k, V = h) &= \mathbb{P}(X = k, Y - X = h) \\ &= \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k + h) = p^2 q^{2k+h}. \end{aligned}$$

Pour  $h \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M = k, V = h) &= \mathbb{P}(Y = k, Y - X = h) \\ &= \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(X = k - h) = p^2 q^{2k-h}. \end{aligned}$$

La loi de  $(M, V)$  est donc donnée par :

$$\forall (k, h) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(M = k, V = h) = p^2 q^{2k+|h|}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 14 / 89

Exercice 4 Q 3.c

### Exercice 4

Question 3.c

La loi de  $V$  se déduit de celle du couple  $(M, V)$  :  $V$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  avec :

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(V = h) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(M = k, V = h) = p^2 q^{|h|} \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} = \frac{p^2 q^{|h|}}{1 - q^2}.$$

On peut alors vérifier l'indépendance des variables  $M$  et  $V$  : pour  $(k, h) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ,

$$\mathbb{P}(M = k) \mathbb{P}(V = h) = p^2 q^{2k+|h|} = \mathbb{P}(M = k, V = h).$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 15 / 89

Exercice 5 Q 1

### Exercice 5

Question 1

Pour déterminer la loi de  $Y = \inf(X_1, X_2)$  on écrit, par indépendance de  $X_1$  et  $X_2$  :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y > k) &= \mathbb{P}(X_1 > k, X_2 > k) = \mathbb{P}(X_1 > k) \mathbb{P}(X_2 > k) \\ &= \left( \sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) \right)^2 = \left( \sum_{n=k+1}^{\infty} p q^n \right)^2 \\ &= \left( q \frac{p^{k+1}}{1-p} \right)^2 = p^{2k+2} \end{aligned}$$

où l'on a noté  $q = 1 - p$ .

On pourra noter que la formule est encore valable pour  $k = -1$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 16 / 89

Exercice 5 Q 1

La variable  $Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et, pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a l'union disjointe

$$[Y > k - 1] = [Y = k] \cup [Y > k]$$

si bien que

$$P(Y = k) = P(Y > k - 1) - P(Y > k) = p^{2k} - p^{2k+2} = (1 - p^2)p^{2k}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 17 / 89

Exercice 5 Q 2

### Exercice 5

Question 2

On a  $Z = Y + X_3$  avec  $Y$  fonction de  $X_1$  et  $X_2$  donc indépendante de  $X_3$ . La loi de  $Z$  s'obtient donc par convolution de celles de  $Y$  et  $X_3$  : elle est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  avec

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(Y = i) P(X_3 = k - i) = q(1 - p^2) \sum_{i=0}^k p^{2i} p^{k-i} \\ &= q(1 - p^2) p^k \sum_{i=0}^k p^i = q(1 - p^2) p^k \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p} \\ &= (1 - p^2) p^k (1 - p^{k+1}). \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 18 / 89

Exercice 5 Q 3

### Exercice 5

Question 3

Le temps moyen passé par  $A_3$  à la poste est  $E(Z) = E(Y) + E(X_3)$  sous réserve d'existence.

En effet,  $X_3$  admet pour espérance

$$E(X_3) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X_3 = k) = p(1 - p) \sum_{k=1}^{\infty} k p^{k-1} = \frac{p}{1 - p}$$

étant donné la convergence absolue de la série géométrique dérivée ci-dessous, de raison  $p \in ]-1, 1[$ .

De même,  $Y$  (dont la loi se déduit de celle de  $X_3$  en remplaçant  $p$  par  $p^2$ ) admet pour espérance

$$E(Y) = \frac{p^2}{1 - p^2}.$$

Finalement,

$$E(Z) = \frac{p}{1 - p} + \frac{p^2}{1 - p^2} = \frac{p + 2p^2}{1 - p^2}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 19 / 89

Exercice 7 Q 1

### Exercice 7

Question 1

Il est déjà nécessaire que  $\alpha \geq 0$ .

Les paquets  $l_k = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i + j = k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , réalisent une partition de  $\mathbb{N}^2$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , la somme finie de termes positifs

$$\sum_{(i,j) \in l_k} \frac{\alpha}{(i+j+1)!} = \sum_{(i,j) \in l_k} \frac{\alpha}{(k+1)!} = (k+1) \frac{\alpha}{(k+1)!} = \frac{\alpha}{k!}$$

est le terme général d'une série exponentielle convergente, si bien que la série double  $\sum_{i,j} \frac{\alpha}{(i+j+1)!}$  converge (absolument) et sa somme peut être calculée par sommation par paquets :

$$\sum_{i,j \geq 0} \frac{\alpha}{(i+j+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i,j) \in l_k} \frac{\alpha}{(i+j+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{k!} = \alpha e.$$

La famille double  $\left(\frac{\alpha}{(i+j+1)!}\right)_{i,j \geq 0}$  définit donc une loi conjointe si, et seulement si,  $\alpha = e^{-1}$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 20 / 89

Exercice 7 Q 2

### Exercice 7

Question 2

La loi conjointe étant symétrique, les deux lois marginales sont égales et données par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = i, Y = j) = e^{-1} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 - e^{-1} \sum_{k=0}^i \frac{1}{k!}.$$

En observant par exemple que

$$P(X = 0, Y = 0) = e^{-1} \neq (1 - e^{-1})^2 = P(X = 0) P(Y = 0),$$

il apparaît que les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 21 / 89

Exercice 7 Q 3

### Exercice 7

Question 3

Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned} E(2^{X+Y}) &= \sum_{i,j \geq 0} 2^{i+j} P(X = i, Y = j) \\ &= e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{2^{i+j}}{(i+j+1)!} \\ &= e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e, \end{aligned}$$

la série double étant absolument convergente par un argument similaire à celui employé en 1., ce qui assure l'existence de l'espérance.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 22 / 89

Exercice 7 Q 4

### Exercice 7

Question 4

La variable  $X + Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$  avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X + Y = k) = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=k}} P(X = i, Y = j) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Elle suit donc la loi de Poisson  $\mathcal{P}(1)$ .

On retrouve alors le résultat de la question précédente en utilisant le théorème de transfert :

$$E(2^{X+Y}) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k P(X + Y = k) = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 23 / 89

Exercice 8 Q 1

### Exercice 8

Question 1

On obtient sans difficulté la loi conjointe du couple  $(S, T)$  d'où l'on déduit celles de  $S$  et  $T$  :

$S \setminus T$	-1	0	1	Loi de $S$	
0	0	$q^2$	0		$q^2$
1	$pq$	0	$pq$		$2pq$
2	0	$p^2$	0	$p^2$	
Loi de $T$	$pq$	$p^2 + q^2$	$pq$		

où l'on a noté  $q = 1 - p$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 24 / 89

Exercice 8 Q 2

### Exercice 8

Question 2

On a d'une part  $E(S) = E(X) + E(Y) = 2p$  et  $E(T) = E(X) - E(Y) = 0$ .  
 D'autre part, la loi conjointe du couple  $(S, T)$  donne la loi de la variable  $ST$ , à valeurs dans  $\{-1, 0, 1\}$  :

$$\begin{aligned} P(ST = -1) &= P(S = 1, T = -1) = pq, \\ P(ST = 0) &= P(S = 0, T = 0) + P(S = 2, T = 0) = p^2 + q^2, \\ P(ST = 1) &= P(S = 1, T = 1) = pq \end{aligned}$$

puis son espérance  $E(ST) = 0$ .

On est à présent en mesure de calculer

$$\text{cov}(S, T) = E(ST) - E(S)E(T) = 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 25 / 89

Exercice 8 Q 2

*Remarque.* En observant que  $X^2 = X$  et  $Y^2 = Y$ , on peut obtenir plus rapidement l'expression de

$$E(ST) = E((X + Y)(X - Y)) = E(X^2 - Y^2) = E(X) - E(Y) = 0.$$

*Remarque.* On peut aussi obtenir la covariance de  $(S, T)$  à partir de la formule

$$V(S + T) = V(S) + 2\text{cov}(S, T) + V(T),$$

sachant que

$$V(S + T) = V(2X) = 4V(X) = 4p(1 - p)$$

et, par indépendance de  $X$  et  $Y$ ,

$$V(S) = V(T) = V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) = 2p(1 - p).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 26 / 89

Exercice 8 Q 3

### Exercice 8

Question 3

Le tableau de la question 1. met en évidence que  $S$  et  $T$  ne sont pas indépendantes : on a par exemple

$$P(S = 0, T = 1) = 0$$

alors que

$$P(S = 0)P(T = 1) = pq^3 \neq 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 27 / 89

Exercice 9 Q 1

### Exercice 9

Question 1

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$$

où, en notant  $p = P(X = 1)$ ,

$$V(X) = p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$$

et, de même,  $V(Y) \leq \frac{1}{4}$ . Il en résulte que :

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \frac{1}{4}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 28 / 89

Exercice 9 Q 2

### Exercice 9

Question 2

En notant  $p = P(X = 1)$  et  $q = P(Y = 1)$ , on a :

$$\text{cov}(X, Y) = P(X = 1, Y = 1) - pq.$$

La condition énoncée est nécessaire : si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors le cours assure que  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .  
 Réciproquement, si  $\text{cov}(X, Y) = 0$ , alors  $P(X = 1, Y = 1) = pq$  puis, sachant que  $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ ,

$$P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1) = p$$

d'où

$$P(X = 1, Y = 0) = p - pq = p(1 - q).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 29 / 89

Exercice 9 Q 2

On obtient ainsi la loi conjointe de  $(X, Y)$  :

$X \setminus Y$	0	1	Loi de $X$
0	$(1 - p)(1 - q)$	$(1 - p)q$	$1 - p$
1	$p(1 - q)$	$pq$	$p$

Loi de $Y$	$1 - q$	$q$
------------	---------	-----

et l'on vérifie sur ce tableau que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :

$$\forall k, l \in \{0, 1\}, \quad P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(Y = l).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 30 / 89

Exercice 10 Q 1

### Exercice 10

Question 1

La variable  $X$  prend ses valeurs dans  $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  et  $Y$  dans  $\llbracket 2, n \rrbracket$ . Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \times \llbracket 2, n \rrbracket$ , deux cas se présentent :

- si  $i \geq j$ , l'événement  $[X = i, Y = j]$  est impossible et  $P(X = i, Y = j) = 0$  ;
- si  $i < j$ , l'événement  $[X = i, Y = j]$  est réalisé si, et seulement si, on tire les boules numérotées  $i$  et  $j$ . Comme il y a  $\binom{n}{2}$  poignées de 2 boules possibles qui sont équiprobables, on a donc :

$$P(X = i, Y = j) = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Ainsi :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \times \llbracket 2, n \rrbracket, \quad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 31 / 89

Exercice 10 Q 1

On en déduit la loi de  $X$  :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, \quad P(X = i) &= \sum_{j=2}^n P(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

puis celle de  $Y$  :

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{j-1} P(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 32 / 89

Exercice 10 Q 2

### Exercice 10

Question 2

La variable  $Y$  étant finie, elle admet des moments à tous les ordres.  
En particulier, elle a pour espérance

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=2}^n j P(Y=j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n j(j-1) = \frac{4}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n \binom{j}{2} \\ &= \frac{4}{n(n-1)} \binom{n+1}{3} = \frac{4}{n(n-1)} \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{2(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 33 / 89

Exercice 10 Q 2

On détermine de même, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(Y(Y-2)) &= \sum_{j=2}^n j(j-2) P(Y=j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n j(j-1)(j-2) \\ &= \frac{12}{n(n-1)} \sum_{j=3}^n \binom{j}{3} = \frac{12}{n(n-1)} \binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y(Y-2)) + 2E(Y) - E(Y)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{18}. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 34 / 89

Exercice 10 Q 3

### Exercice 10

Question 3

Puisque  $X$  est à valeurs dans  $[1, n-1]$ , la variable  $n+1-X$  est à valeurs dans  $[2, n]$  et sa loi se déduit de celle de  $X$  : pour tout  $j \in [2, n]$ ,

$$P(n+1-X=j) = P(X=n+1-j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} = P(Y=j).$$

Les variables  $n+1-X$  et  $Y$  ont donc même loi.  
Il en résulte que  $E(Y) = E(n+1-X) = n+1 - E(X)$ ,  
ce qui amène la valeur de

$$E(X) = n+1 - E(Y) = \frac{n+1}{3}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 35 / 89

Exercice 10 Q 3

On obtient de même :

$$V(Y) = V(n+1-X) = (-1)^2 V(X) = V(X)$$

d'où

$$V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 36 / 89

Exercice 10 Q 4

### Exercice 10

Question 4

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(X(Y-2)) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq n}} i(j-2) P(X=i, Y=j) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} i(j-2) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n (j-2) \sum_{i=1}^{j-1} i = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=3}^n (j-2) \frac{j(j-1)}{2} \\ &= \frac{6}{n(n-1)} \sum_{j=3}^n \binom{j}{3} = \frac{6}{n(n-1)} \binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)(n-2)}{4}. \end{aligned}$$

On en déduit, d'après la formule de Kœnig-Huygens, la valeur de

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = E(X(Y-2)) + 2E(X) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{36}. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 37 / 89

Exercice 10 Q 5

### Exercice 10

Question 5

Le coefficient de corrélation entre  $X$  et  $Y$  est défini si, et seulement si,  $V(X) \neq 0$  et  $V(Y) \neq 0$ , ce qui revient ici à  $n \neq 2$  c'est-à-dire à  $n \geq 3$ . Il vaut dans ce cas :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{1}{2}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 38 / 89

Exercice 11 Q 1

### Exercice 11

Question 1

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  l'événement « l'événement  $A$  se réalise au cours de la  $k$ -ième expérience ». On note également  $q = 1 - p$ .

Le couple  $(X, Y)$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . Réciproquement, pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , on a  $P(X=i, Y=j) = 0$  si  $i \geq j$  alors que, si  $i < j$ ,

$$\begin{aligned} P(X=i, Y=j) &= P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{i-1}} \cap A_i \cap \overline{A_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{A_{j-1}} \cap A_j) \\ &= P(\overline{A_1}) \dots P(\overline{A_{i-1}}) P(A_i) P(\overline{A_{i+1}}) \dots P(\overline{A_{j-1}}) P(A_j) \\ &= p^2 q^{j-2} \end{aligned}$$

par indépendance des lancers.

La loi du couple  $(X, Y)$  est donc donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P(X=i, Y=j) = \begin{cases} p^2 q^{j-2} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 39 / 89

Exercice 11 Q 1

On en déduit la loi marginale de  $X$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=i) &= \sum_{j=1}^{\infty} P(X=i, Y=j) = \sum_{j=i+1}^{\infty} p^2 q^{j-2} \\ &= p^2 \frac{q^{i-1}}{1-q} = pq^{i-1}. \end{aligned}$$

Il n'est pas surprenant de reconnaître une loi géométrique de paramètre  $p$  : la variable  $X$  donne le temps d'attente du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ .

Ainsi que celle de  $Y$ , à valeurs dans  $[2, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \forall j \geq 2, \quad P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^{j-1} p^2 q^{j-2} \\ &= (j-1)p^2 q^{j-2}. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 40 / 89

## Exercice 11

## Question 2.a

La variable  $X$ , de loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ , admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

La variable  $Y$  admet également une espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=2}^{\infty} j \mathbb{P}(Y=j) = p^2 \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)q^{j-2} = \frac{2p^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}$$

car la série ci-dessus, géométrique dérivée, est absolument convergente puisque  $|q| < 1$ . On justifie de même l'existence

$$\mathbb{E}(Y(Y-2)) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-2) \mathbb{P}(Y=j) = p^2 q \sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)(j-2)q^{j-3} = \frac{6q}{p^2},$$

d'où l'on déduit l'existence d'un moment d'ordre 2 et donc une variance pour  $Y$  :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y(Y-2)) + 2\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{2q}{p^2}.$$

## Exercice 11

## Question 2.b

Les variables  $X$  et  $Y$  admettant chacune un moment d'ordre 2, le produit  $X(Y-2)$  admet une espérance, que le théorème de transfert permet de calculer :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(Y-2)) &= \sum_{i,j \geq 1} i(j-2) \mathbb{P}(X=i, Y=j) = p^2 \sum_{1 \leq i < j} i(j-2)q^{i-2} \\ &= p^2 \sum_{j=2}^{\infty} (j-2)q^{j-2} \sum_{i=1}^{j-1} i = \frac{p^2 q}{2} \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)(j-2)q^{j-3} \\ &= \frac{p^2 q}{2} \frac{3!}{(1-q)^4} = 3 \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons, le couple  $(X, Y)$  admet une covariance donnée par la formule de Huygens :

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X(Y-2)) + 2\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

On obtient un coefficient de corrélation linéaire  $\rho_{X,Y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## Exercice 11

## Question 3

La variable  $Y-X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  avec, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y-X=k) &= \sum_{\substack{1 \leq i < j \\ j-i=k}} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=i+k) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p^2 q^{i+k-2} = p^2 \frac{q^{k-1}}{1-q} = pq^{k-1}. \end{aligned}$$

La variable  $Y-X$  suit donc la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ .

On vérifie alors que les variables  $X$  et  $Y-X$  sont indépendantes : pour  $i, k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=i, Y-X=k) &= \mathbb{P}(X=i, Y=i+k) = p^2 q^{i+k-2} \\ &= (pq^{i-1})(pq^{k-1}) = \mathbb{P}(X=i) \mathbb{P}(Y-X=k). \end{aligned}$$

Ainsi la loi de  $Y$  (appelée loi de Pascal  $\mathcal{P}(2, p)$ , loi du temps d'attente du deuxième succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ ) est-elle celle de la somme de deux variables indépendantes de loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ .

Par suite,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y-X) = \frac{2}{p}$$

puis, par indépendance de  $X$  et  $Y-X$ ,

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X + (Y-X)) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y-X) = \frac{2q}{p^2}$$

et de même

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(2X + (Y-X)) = 4\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y-X) = \frac{5q}{p^2}$$

d'où finalement

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)) = \frac{q}{p^2}.$$

## Exercice 11

## Question 4

Conditionnellement à l'événement  $[Y=n]$ , la variable  $X$  est presque sûrement à valeurs dans  $[1, n-1]$  avec :

$$\forall i \in [1, n-1], \quad \mathbb{P}_{[Y=n]}(X=i) = \frac{\mathbb{P}(X=i, Y=n)}{\mathbb{P}(Y=n)} = \frac{1}{n-1}.$$

Elle suit donc la loi uniforme sur l'intervalle  $[1, n-1]$ .

## Exercice 12

## Question 1

Conditionnellement à l'événement  $[N=j]$ , la variable  $X$  donne le nombre de succès (l'utilisateur vient pour poster une lettre) lors d'une succession de  $j$  épreuves de Bernoulli (un usager vient à la poste, pourquoi?) indépendantes et de même paramètre  $p$ ; elle suit donc la loi binomiale  $\mathcal{B}(j, p)$ . Plus précisément,

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}_{[N=j]}(X=i) = \begin{cases} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}.$$

## Exercice 12

## Question 2

Pour  $i, j \in \mathbb{N}$ , on a par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(X=i, N=j) = \mathbb{P}(N=j) \mathbb{P}_{[N=j]}(X=i)$$

d'où, d'après la question 1. :

$$\mathbb{P}(X=i, N=j) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}.$$

## Exercice 12

## Question 3

La variable  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On obtient sa loi à partir de la loi conjointe de  $(X, N)$  : pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=i) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=i, N=j) = \sum_{j=i}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{j-i}}{(j-i)!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}. \end{aligned}$$

Ainsi  $X$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda p)$ . Elle admet donc espérance et variance données par  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda p$ .

Exercice 12 Q 4

### Exercice 12

Question 4

Le même raisonnement (en échangeant le point de vue succès/échec et en remplaçant  $p$  par  $1 - p$ ) montre que  $Y$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda(1 - p))$  :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = j) = e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}.$$

En remarquant que  $X + Y = N$ , on constate alors sur la formule ci-dessus et celles des questions 2. et 3. que pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i, Y = j) &= \mathbb{P}(X = i, N = i + j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \times e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} = \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j), \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

www.rfid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 49 / 89

Exercice 12 Q 5

### Exercice 12

Question 5

Puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a  $\text{cov}(X, Y) = 0$  d'où

$$0 = \text{cov}(X, N - X) = \text{cov}(X, N) - \text{cov}(X, X)$$

c'est-à-dire

$$\text{cov}(X, N) = \text{cov}(X, X) = \text{V}(X) = \lambda p.$$

Ainsi  $\text{cov}(X, N) > 0$  : les variables  $X$  et  $N$  ont donc tendance à se situer du même côté de leurs espérances respectives. En moyenne, un afflux d'utilisateurs engendrera un afflux de courriers à poster.

www.rfid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 50 / 89

Exercice 12 Q 6

### Exercice 12

Question 6

Par définition,

$$\rho_{X,N} = \frac{\text{cov}(X, N)}{\sigma(X)\sigma(N)} = \sqrt{\frac{\lambda p}{\lambda}} = \sqrt{p}.$$

Ainsi  $|\rho_{X,N}| < 1$  et  $N$  ne peut donc être fonction affine de  $Y$ .

www.rfid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 51 / 89

Exercice 13 Q 1

### Exercice 13

Question 1

La variable  $U$  est à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  avec classement, par indépendance de  $X_1$  et  $X_2$  :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(U \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, X_2 \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k) \mathbb{P}(X_2 \leq k) = \frac{k^2}{n^2},$$

la formule étant encore valable pour  $k = 0$ .  
On en déduit que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \leq k) - \mathbb{P}(U \leq k - 1) = \frac{2k - 1}{n^2}.$$

www.rfid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 52 / 89

Exercice 13 Q 1

### Exercice 13

Question 1

Par décroissance de la fonction  $x \mapsto n + 1 - x$ ,

$$\begin{aligned} n + 1 - V &= n + 1 - \inf(X_1, X_2) \\ &= \sup(n + 1 - X_1, n + 1 - X_2) \\ &= \sup(Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

où  $Y_1 = n + 1 - X_1$  et  $Y_2 = n + 1 - X_2$  sont deux variables indépendantes de loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . La variable  $n + 1 - V = \sup(Y_1, Y_2)$  a donc même loi que  $U = \sup(X_1, X_2)$ , d'où l'on déduit la loi de  $V$  : elle est à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  avec :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(V = k) &= \mathbb{P}(n + 1 - V = n + 1 - k) \\ &= \mathbb{P}(U = n + 1 - k) \\ &= \frac{2n - 2k + 1}{n^2}. \end{aligned}$$

www.rfid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 53 / 89

Exercice 13 Q 2

### Exercice 13

Question 2

Les variables  $U$  et  $V$  étant finies, elles admettent des moments à tous ordres, donc en particulier espérance et variance. Pour  $U$ , il vient

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(U = k) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

puis

$$\mathbb{E}(U^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(U = k) = \frac{n+1}{n} \frac{3n^2 + n - 1}{6}$$

d'où

$$\text{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}.$$

www.rfid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 54 / 89

Exercice 13 Q 2

### Exercice 13

Question 2

Sachant que  $n + 1 - V$  a même loi que  $U$ , on en déduit les valeurs de

$$\mathbb{E}(V) = n + 1 - \mathbb{E}(n + 1 - V) = n + 1 - \mathbb{E}(U) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

et

$$\text{V}(V) = \text{V}(n + 1 - V) = \text{V}(U) = \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}.$$

www.rfid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 55 / 89

Exercice 13 Q 3

### Exercice 13

Question 3

En remarquant que  $U + V = X_1 + X_2$  où  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, on obtient :

$$\text{V}(U + V) = \text{V}(X_1 + X_2) = \text{V}(X_1) + \text{V}(X_2) = \frac{n^2 - 1}{6}.$$

En comparant au développement

$$\text{V}(U + V) = \text{V}(U) + \text{V}(V) + 2 \text{cov}(U, V),$$

on en déduit la valeur de

$$\text{cov}(U, V) = \frac{1}{2} (\text{V}(U + V) - \text{V}(U) - \text{V}(V)) = \frac{(n^2 - 1)^2}{36n^2}.$$

www.rfid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 56 / 89

Exercice 13 Q 4

### Exercice 13

Question 4

Les variables  $X_1$  et  $X_2$  étant indépendantes à valeurs dans  $[1, n]$ , leur somme  $S$  est à valeurs dans  $[2, 2n]$  et sa loi est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \forall s \in [2, 2n], \quad \mathbb{P}(S = s) &= \sum_{\substack{1 \leq k, \ell \leq n \\ k + \ell = s}} \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = \ell) \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Card}\{(k, \ell) \in [1, n]^2 : k + \ell = s\} \\ &= \begin{cases} \frac{s-1}{n^2} & \text{si } s \leq n+1 \\ \frac{2n-s+1}{n^2} & \text{si } s \geq n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 57 / 89

Exercice 14 Q 3

### Exercice 14

Question 3

La variable  $T = X - Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et sa loi est donnée, puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(T = k) = \sum_{\substack{i, j \geq 1 \\ i - j = k}} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j).$$

On distingue deux cas :

- Si  $k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = k) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = j+k) \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{\infty} p^2 q^{2j+k-2} \\ &= p^2 q^{k-2} \sum_{j=1}^{\infty} q^{2j} = p^2 q^{k-2} \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p^2 q^k}{1-q^2}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 58 / 89

Exercice 14 Q 3

- Si  $k < 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = k) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = i - k) = \sum_{i=1}^{\infty} p^2 q^{2i-k-2} \\ &= p^2 q^{-k-2} \sum_{i=1}^{\infty} q^{2i} = p^2 q^{-k-2} \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p^2 q^{-k}}{1-q^2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(T = k) = \frac{p^2 q^{|k|}}{1-q^2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 59 / 89

Exercice 15 Q 1.a

### Exercice 15

Question 1.a

On note  $q = 1 - p$  et, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_k$  (resp.  $B_k$ ) l'événement « le  $k$ -ième message transite par le serveur A (resp. B) ». Étant donnés deux événements  $E_1$  et  $E_2$ , on s'autorise à écrire  $E_1 E_2$  pour désigner leur intersection.

La variable  $L_1$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  avec, pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ ,

$$[L_1 = i] = A_1 A_2 \cdots A_i B_{i+1} \cup B_1 B_2 \cdots B_i A_{i+1}$$

d'où, la réunion étant disjointe et les choix successifs indépendants :

$$\mathbb{P}(L_1 = i) = \mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_i B_{i+1}) + \mathbb{P}(B_1 B_2 \cdots B_i A_{i+1}) = p^i q + q^i p.$$

On remarquera que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(L_1 = i) = q \frac{p}{1-p} + p \frac{q}{1-q} = p + q = 1,$$

ce qui prouve que  $L_1$  est bien une variable aléatoire...

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 60 / 89

Exercice 15 Q 1.b

### Exercice 15

Question 1.b

Vu la convergence absolue des séries géométriques dérivées de raison  $p, q \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_1) &= \sum_{i=1}^{\infty} i \mathbb{P}(L_1 = i) = qp \sum_{i=1}^{\infty} i p^{i-1} + pq \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} \\ &= qp \frac{1}{(1-p)^2} + pq \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2 + q^2}{pq}. \end{aligned}$$

On établirait de même, par le théorème de transfert, l'existence de

$$\mathbb{E}(L_1(L_1 + 1)) = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) i (qp^i + pq^i),$$

ce qui prouve l'existence de  $V(L_1)$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 61 / 89

Exercice 15 Q 2.a

### Exercice 15

Question 2.a

Pour  $i, j \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$[L_1 = i, L_2 = j] = A_1 \cdots A_i B_{i+1} \cdots B_{i+j} A_{i+j+1} \cup B_1 \cdots B_i A_{i+1} \cdots A_{i+j} B_{i+j+1}$$

d'où, à nouveau par incompatibilité puis indépendance :

$$\mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j) = p^i q^j p + q^i p^j q = p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 62 / 89

Exercice 15 Q 2.b

### Exercice 15

Question 2.b

De la loi conjointe de  $(L_1, L_2)$ , on déduit la loi de la variable  $L_2$  : elle est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  avec, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_2 = j) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j) = q^j p^2 \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} + p^j q^2 \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} \\ &= q^j p^2 \frac{1}{1-p} + p^j q^2 \frac{1}{1-q} = q^{j-1} p^2 + p^{j-1} q^2. \end{aligned}$$

On peut, cette fois encore, s'assurer que la définition de la variable  $L_2$  est consistante en vérifiant que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(L_2 = j) = 1.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 63 / 89

Exercice 15 Q 2.c

### Exercice 15

Question 2.c

Il vient comme précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_2) &= \sum_{j=1}^{\infty} j \mathbb{P}(L_2 = j) = p^2 \sum_{j=1}^{\infty} j q^{j-1} + q^2 \sum_{j=1}^{\infty} j p^{j-1} \\ &= p^2 \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \frac{1}{(1-p)^2} = 2. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 64 / 89



Exercice 15 Q 3

### Exercice 15

Question 3

Comme précédemment, la variable  $L_3$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  avec, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , en s'appuyant sur le système complet associé au couple  $(L_1, L_2)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_3 = k) &= \sum_{i,j \geq 1} \mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j, L_3 = k) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (p^i q^j p^k q + q^j p^i q^k p) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( p^{i+k} q^2 \frac{1}{1-q} + q^{i+k} p^2 \frac{1}{1-p} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} (p^{i+k-1} q^2 + q^{i+k-1} p^2) \\ &= p^k q^2 \frac{1}{1-p} + q^k p^2 \frac{1}{1-q} = p^k q + q^k p \end{aligned}$$

et l'on observe que  $L_3$  a même loi que  $L_1$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 65 / 89

Exercice 15 Q 4.a

### Exercice 15

Question 4.a

La variable  $L_1$  admet une variance d'après 1.b. et, pour les mêmes raisons,  $L_2$  en admet une également. Dans ces conditions, le couple  $(L_1, L_2)$  admet une covariance.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 66 / 89

Exercice 15 Q 4.b

### Exercice 15

Question 4.b

L'existence de  $\text{cov}(L_1, L_2)$  équivaut à la convergence absolue de la série double ci-dessous, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_1 L_2) &= \sum_{i,j \geq 1} ij \mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( ip^{i+1} q \sum_{j=1}^{\infty} jq^{j-1} + iq^{i+1} p \sum_{j=1}^{\infty} jp^{j-1} \right) \\ &= q \sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1} + p \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{pq}. \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de

$$\text{cov}(L_1, L_2) = \mathbb{E}(L_1 L_2) - \mathbb{E}(L_1) \mathbb{E}(L_2) = \frac{-1 + 4p - 4p^2}{pq} = -\frac{(2p-1)^2}{pq}.$$

Il apparaît que  $\text{cov}(L_1, L_2) \leq 0$  avec égalité si, et seulement si,  $p = \frac{1}{2}$ .

*Remarque.* Les variables  $L_1$  et  $L_2$  ne sont donc pas indépendantes pour  $p \neq \frac{1}{2}$ . On peut montrer qu'elles le sont pour  $p = \frac{1}{2}$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 67 / 89

Exercice 16 Q 1

### Exercice 16

Question 1

La variable  $B$  donne le nombre de succès (la boule tirée est bleue) lors d'une répétition de  $n$  expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $b$ . Elle suit donc la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, b)$ . Elle admet espérance et variance données par

$$\mathbb{E}(B) = nb \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(B) = nb(1-b).$$

Pour les mêmes raisons, les variables  $R$  et  $J$  suivent respectivement les lois  $\mathcal{B}(n, r)$  et  $\mathcal{B}(n, j)$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 68 / 89

Exercice 16 Q 2

### Exercice 16

Question 2

La variable  $B + R$  compte le nombre de succès (obtenir une boule bleue ou rouge) dans une succession de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $b + r$ . Elle suit donc la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, b + r)$  et admet à ce titre pour variance  $\mathbb{V}(B + R) = n(b + r)(1 - b - r)$ .

Partant de

$$\mathbb{V}(B + R) = \mathbb{V}(B) + \mathbb{V}(R) + 2 \text{cov}(B, R),$$

on en déduit la valeur de

$$\text{cov}(B, R) = \frac{1}{2} (\mathbb{V}(B + R) - \mathbb{V}(B) - \mathbb{V}(R)) = -nbr.$$

*Remarque.* On trouve  $\text{cov}(B, R) < 0$  ce qui n'est pas étonnant car si  $B$  a tendance à augmenter,  $R$  a tendance à diminuer : les variables  $B$  et  $R$  ont donc tendance à se situer de part et d'autre de leurs moyennes.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 69 / 89

Exercice 16 Q 3

### Exercice 16

Question 3

Étant donné une partie  $X$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $B_X$  l'événement « les tirages numérotés par un élément de  $X$  renvoient tous une boule bleue » et l'on définit de même  $R_X$  et  $J_X$ .

Pour  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , il s'agit de calculer  $\mathbb{P}(B = x, R = y, J = z)$ . Cette probabilité est bien sûr nulle si  $x + y + z \neq n$ . Dans le cas où  $x + y + z = n$ , l'événement  $[B = x, R = y, J = z]$  s'écrit comme l'union disjointe des événements  $B_X \cap R_Y \cap J_Z$ , où  $X$  de cardinal  $x$ ,  $Y$  de cardinal  $y$  et  $Z$  de cardinal  $z$  partitionnent  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Par indépendance des tirages, chaque événement  $B_X \cap R_Y \cap J_Z$  a pour probabilité  $b^x r^y j^z$ .

Quant au choix d'un tel triplet  $(X, Y, Z)$ , il revient à celui d'une partie  $X$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $x$  éléments ( $\binom{n}{x}$  possibilités) et d'une partie  $Y$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus X$  à  $y$  éléments ( $\binom{n-x}{y}$  possibilités), après quoi  $Z = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus (X \cup Y)$  est une partie complètement déterminée de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $z$  éléments qui complète les deux premières pour former une partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 70 / 89

Exercice 16 Q 3

On a donc dans ce cas :

$$\mathbb{P}(B = x, R = y, J = z) = \binom{n}{x} \binom{n-x}{y} b^x r^y j^z = \frac{n!}{x!y!z!} b^x r^y j^z.$$

Pour résumer, la loi du vecteur  $(B, R, J)$  est donnée par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3, \quad \mathbb{P}(B = x, R = y, J = z) = \begin{cases} \frac{n!}{x!y!z!} b^x r^y j^z & \text{si } x + y + z = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Remarque.* La loi précédente est appelée *loi multinomiale* de paramètres  $(n, b, r)$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 71 / 89

Exercice 16 Q 3

### Méthode alternative.

On peut aussi utiliser la formule des probabilités composées : pour  $x, y, z \in \mathbb{N}$  tels que  $x + y + z = n$ , on a

$$\mathbb{P}(B = x, R = y, J = z) = \mathbb{P}(B = x) \mathbb{P}_{[B=x]}(R = y) \mathbb{P}_{[B=x, R=y]}(J = z)$$

où

- on a déjà vu que

$$\mathbb{P}(B = x) = \binom{n}{x} b^x (1-b)^{n-x} = \binom{n}{x} b^x (r+j)^{n-x},$$

- on a  $\mathbb{P}_{[B=x, R=y]}(J = z) = 1$  car  $x + y + z = n$ ,

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 72 / 89

- conditionnellement à l'événement  $[B = x]$ , la variable  $R$  donne le nombre de succès (apparition d'une boule rouge) lors d'un répétition de  $n - x$  épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre, la proportion  $\frac{r}{r+j}$  de boules rouges dans l'urne après retrait des boules bleues, si bien que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[B=x]}(R = y) &= \binom{n-x}{y} \left(\frac{r}{r+j}\right)^y \left(1 - \frac{r}{r+j}\right)^{n-x-y} \\ &= \binom{n-x}{y} \frac{r^y j^{n-x-y}}{(r+j)^{n-x}}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.

### Exercice 18

#### Question 1

Soit  $n \geq 1$ . Conditionnellement à l'événement  $[N = n]$ , on a  $S = X_1 + \dots + X_n$  presque sûrement. Comme chacune des variables  $X_i$  admet une espérance (pour  $\mathbb{P}$ ), elle admet une espérance conditionnellement à  $[N = n]$  et alors, par linéarité de l'espérance (pour  $\mathbb{P}_{[N=n]}$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S | N = n) &= \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n | N = n) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k | N = n) = n \mathbb{E}(X_1) \end{aligned}$$

puisque les variables  $X_1, \dots, X_n$  ont même loi et sont indépendantes de  $N$ .

Conditionnellement à l'événement  $[N = 0]$ , on a  $S = 0$  si bien que  $\mathbb{E}(S | N = 0) = 0$ .

### Exercice 19

#### Question 1

Par linéarité de l'espérance, il vient :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n p^k = p \frac{1-p^n}{1-p}$$

puisque  $p \neq 1$ .

De plus, les variables  $X_1, \dots, X_n$  étant mutuellement indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^n p^k(1-p^k) \\ &= p \frac{1-p^n}{1-p} - p^2 \frac{1-p^{2n}}{1-p^2} = \frac{p(1-p^n)(1-p^{n+1})}{1-p^2}. \end{aligned}$$

### Exercice 19

#### Question 2.b

Toujours par linéarité de l'espérance, on obtient donc :

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{k=1}^n p^{2k+1} = p^3 \frac{1-p^{2n}}{1-p^2}.$$

### Exercice 17

Par théorème, la somme  $S_n$  de  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  mutuellement indépendantes de lois de Poisson  $\mathcal{P}(1)$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(n)$ . Dans ces conditions, le théorème de transfert assure l'existence de

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k/n} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ne^{-1/n})^k}{k!} = e^{n(e^{-1/n}-1)}$$

puisque la série ci-dessus converge absolument comme série exponentielle.

Par ailleurs,

$$n(e^{-1/n} - 1) \sim n\left(-\frac{1}{n}\right) = -1 \rightarrow -1, \quad n \rightarrow \infty,$$

si bien que

$$\mathbb{E}(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

### Exercice 18

#### Question 2

D'après la question 1., la variable  $S$  admet une espérance conditionnellement à chacun des événements du système complet associé à la variable  $N$  et la série

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}(S | N = n) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}(S | N = n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(N = n) n \mathbb{E}(X_1) \end{aligned}$$

converge puisque  $N$  admet une espérance par hypothèse. Dans ces conditions, la formule de l'espérance totale assure que  $S$  admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}(S | N = n) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) n\right) \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1). \end{aligned}$$

### Exercice 19

#### Question 2.a

La variable  $Y_k = X_k X_{k+1}$  ne prenant que les valeurs 0 et 1, elle suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1) \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = p^{2k+1}$$

par indépendance de  $X_k$  et  $X_{k+1}$ .

### Exercice 19

#### Question 3.a

La variable  $Y_k Y_{k+1} = X_k X_{k+1}^2 X_{k+2} = X_k X_{k+1} X_{k+2}$  suit elle aussi une loi de Bernoulli, de paramètre

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_k Y_{k+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_k = 1, X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_k = 1) \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \mathbb{P}(X_{k+2} = 1) \\ &= p^{3k+3} \end{aligned}$$

par indépendance mutuelle de  $X_k, X_{k+1}$  et  $X_{k+2}$ .

Exercice 19 Q 3.b

### Exercice 19

Question 3.b

Quitte à échanger  $k$  et  $j$ , on peut supposer  $k \leq j$ . On distingue alors trois cas.

- Pour  $j = k$ , on a :
 
$$\text{cov}(Y_k, Y_j) = \text{V}(Y_k) = p^{2k+1}(1 - p^{2k+1}).$$
- Pour  $j = k + 1$ , on a par indépendance mutuelle de  $X_k, X_{k+1}$  et  $X_{k+2}$  :
 
$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_k, Y_j) &= \text{E}(Y_k Y_{k+1}) - \text{E}(Y_k) \text{E}(Y_{k+1}) \\ &= \text{E}(X_k X_{k+1} X_{k+2}) - \text{E}(X_k X_{k+1}) \text{E}(X_{k+1} X_{k+2}) \\ &= \text{E}(X_k) \text{E}(X_{k+1}) \text{E}(X_{k+2}) - \text{E}(X_k) \text{E}(X_{k+1})^2 \text{E}(X_{k+2}) \\ &= p^{3k+3} - p^{4k+4} = p^{3k+3}(1 - p^{k+1}). \end{aligned}$$
- Pour  $j \geq k + 2$ , on a  $\{k, k + 1\} \cap \{j, j + 1\} = \emptyset$  donc les tribus  $\mathcal{A}_{Y_k} \subset \mathcal{A}_{(X_k, X_{k+1})}$  et  $\mathcal{A}_{Y_j} \subset \mathcal{A}_{(X_j, X_{j+1})}$  sont indépendantes d'après le lemme des coalitions, si bien que  $Y_k$  et  $Y_j$  sont indépendantes et  $\text{cov}(Y_k, Y_j) = 0$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 81 / 89

Exercice 19 Q 3.c

### Exercice 19

Question 3.c

Il vient d'après b. :

$$\begin{aligned} \text{V}(T_n) &= \text{V}\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right) = \sum_{k=1}^n \text{V}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} \text{cov}(Y_k, Y_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \text{V}(Y_k) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \text{cov}(Y_k, Y_{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n p^{2k+1}(1 - p^{2k+1}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (p^{3k+3} - p^{4k+4}) \\ &= p^3 \frac{1 - p^{2n}}{1 - p^2} - p^6 \frac{1 - p^{4n}}{1 - p^4} + 2p^6 \frac{1 - p^{3n-3}}{1 - p^3} - 2p^8 \frac{1 - p^{4n-4}}{1 - p^4}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 82 / 89

Exercice 20 Q 1

### Exercice 20

Question 1

Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la variable  $X_i$  compte le nombre de succès (le fournisseur  $F_i$  est choisi par le consommateur) lors d'une succession de  $na$  épreuves de Bernoulli (choix du fournisseur par le consommateur) indépendantes de même paramètre  $p = \frac{1}{n}$ . Elle suit donc une loi binomiale  $\mathcal{B}(na, \frac{1}{n})$  : elle est à valeurs dans  $\llbracket 0, an \rrbracket$  avec

$$\forall k \in \llbracket 0, an \rrbracket, \quad \text{P}(X_i = k) = \binom{an}{k} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an-k}.$$

Elle admet espérance et variance données par :

$$\text{E}(X_i) = a \quad \text{et} \quad \text{V}(X_i) = a \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 83 / 89

Exercice 20 Q 2.a

### Exercice 20

Question 2.a

On a bien sûr  $X_1 + \dots + X_n = na$  d'où

$$n^2 a^2 = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} X_i X_j$$

puis, par linéarité de l'espérance :

$$n^2 a^2 = \sum_{i=1}^n \text{E}(X_i^2) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \text{E}(X_i X_j). \quad (*)$$

La première somme contient  $n$  termes, tous égaux à

$$\text{E}(X_i^2) = \text{V}(X_i) + \text{E}(X_i)^2 = a \left(1 - \frac{1}{n}\right) + a^2$$

et la seconde  $n(n-1)$ , tous égaux pour des raisons de symétrie.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 84 / 89

Exercice 20 Q 2.a

La relation (\*) devient donc, pour tous  $i \neq j$ ,

$$na \left(1 - \frac{1}{n}\right) + na^2 + n(n-1) \text{E}(X_i X_j) = n^2 a^2$$

c'est-à-dire

$$n(n-1) \text{E}(X_i X_j) = a(an^2 - (a+1)n + 1) = a(n-1)(an-1),$$

d'où l'on déduit la valeur de

$$\text{E}(X_i X_j) = a \left(a - \frac{1}{n}\right).$$

La formule de Koenig-Huygens donne alors :

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \text{E}(X_i X_j) - \text{E}(X_i) \text{E}(X_j) = -\frac{a}{n}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 85 / 89

Exercice 20 Q 2.b

### Exercice 20

Question 2.b

Pour  $i \neq j$ , le coefficient de corrélation entre  $X_i$  et  $X_j$  vaut :

$$\rho_{X_i, X_j} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i) \sigma(X_j)} = -\frac{1}{n} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = -\frac{1}{n-1}.$$

Pour  $n = 2$ , on obtient  $\rho_{X_1, X_2} = -1$ , ce qui est cohérent car  $X_2 = 2a - X_1$  est fonction affine de  $X_1$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 86 / 89

Exercice 20 Q 3.a

### Exercice 20

Question 3.a

Chaque variable  $B_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre

$$\text{P}(B_i = 1) = \text{P}(X_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an}.$$

Elle admet donc pour espérance

$$\text{E}(B_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an}.$$

La variable  $Y = B_1 + \dots + B_n$  admet donc pour espérance

$$\text{E}(Y) = \sum_{i=1}^n \text{E}(B_i) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 87 / 89

Exercice 20 Q 3.b

### Exercice 20

Question 3.b

Pour  $i \neq j$ , la variable  $B_i B_j$  ne prend que les valeurs 0 et 1 donc suit la loi de Bernoulli de paramètre

$$\text{P}(B_i B_j = 1) = \text{P}(B_i = 1, B_j = 1) = \text{P}(X_i = 0, X_j = 0).$$

Comme l'événement  $[X_i = 0, X_j = 0]$  est réalisé si, et seulement si, chacun des  $an$  consommateurs choisit un fournisseur parmi les  $n-2$  autres que  $i$  et  $j$ ,

$$\text{P}(X_i = 0, X_j = 0) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{an}.$$

On a donc

$$\text{E}(B_i B_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{an}$$

puis

$$\text{cov}(B_i, B_j) = \text{E}(B_i B_j) - \text{E}(B_i) \text{E}(B_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{an} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2an}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 88 / 89

## Exercice 20

## Question 4

Il vient :

$$\begin{aligned} V(Y) &= V\left(\sum_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n V(B_i) + \sum_{i \neq j} \text{cov}(B_i, B_j) \\ &= nV(B_1) + n(n-1)\text{cov}(B_1, B_2) \\ &= n\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2n}\right] + n^2\left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}\right]. \end{aligned}$$