Probabilités générales et discrètes

Feuille d'exercices

1 ✎ On dispose de n boîtes pouvant chacune contenir jusqu'à n boules. On considère n boules numérotées de 1 à n, que l'on répartit au hasard dans les n boîtes.

1. Montrer que la probabilité p_n que chaque boîte contienne exactement une boule vaut $p_n = \frac{n!}{n^n}$.

2. **a.** Montrer que $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geqslant 2$.

b. Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to \infty$?

2 Deux joueurs A et B jouent une suite de parties avec une probabilité $p \in \,]0,1[$ de victoire pour A à chaque partie. Les parties sont indépendantes les unes des autres. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux joueurs a gagné deux parties de plus que l'autre.

1. Justifier que si le jeu n'est pas fini au bout de $2n$ parties, alors les joueurs sont à égalité à ce moment.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note C_n l'événement « les joueurs sont à égalité au bout de $2n$ parties » (ce qui sous-entend qu'il n'y a pas eu de victoire avant) et $p_n = \mathbb{P}(C_n)$. Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n et en déduire une expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?

4. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

3 Un signal binaire (de valeur 0 ou 1) doit transiter par n relais. Au passage de chaque relais, le signal est susceptible d'être modifié avec probabilité p. On suppose que les relais sont indépendants. On note p_n la probabilité que le signal transmis soit identique au signal émis. On conviendra que $p_0 = 1$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $p_n = p + (1-2p)p_{n-1}$.

2. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de p_n lorsque $n \to \infty$.

4 ✎ On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard dans laquelle on tire n boules avec remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir n boules blanches au cours des n tirages ?

2. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque $N \to \infty$.

5 ✎ On considère une pièce dont la face pile a une probabilité $p \in \,]0,1[$ d'apparaître. Montrer qu'au cours d'une suite infinie de lancers indépendants, la face pile apparaîtra presque sûrement au moins une fois.

6 ✎ Pour remporter un jeu télévisé, les concurrents doivent répondre à des questions de plus en plus difficiles. On estime que la probabilité pour qu'un concurrent donne la réponse correcte à la n-ième question est égale à $\frac{1}{n}$. Ils n'ont droit qu'à une seule réponse par question. Une mauvaise réponse entraîne l'élimination. On note X le nombre de réponses données par un candidat.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

7 ✎ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}.$$

1. Déterminer le réel a.

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

3. Calculer $\mathbb{V}(X)$.

8 ✎ On effectue une première série de lancers d'une pièce équilibrée. On note N le rang du premier « pile » obtenu. On effectue alors une seconde série de N lancers. On note X le nombre de « pile » obtenus lors de cette nouvelle série.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de N.

2. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, déterminer la loi de la variable X conditionnellement à l'événement $[N=n]$.

b. En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

3. Déterminer la loi de X, retrouver l'expression de $\mathbb{E}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.

9 On considère une urne contenant $N > 1$ boules dont r blanches et $N-r$ noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise. On note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour obtenir toutes les boules blanches.

1. Dans le cas $r=1$, reconnaître la loi de X. Donner son espérance. Même question dans le cas $r=N$.

2. On suppose à présent $1 < r < N$.

a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

b. Montrer que pour ces valeurs de k,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

3. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}.$$

10 ★ Soient n et $N \geqslant 2$ deux entiers naturels. Un sac contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue dans ce sac n tirages d'une boule avec remise. On note Z_n le plus grand numéro obtenu.

1. Calculer $\mathbb{P}(Z_n \leqslant k)$ pour $k \in [\![0, N]\!]$ et en déduire la loi de Z_n.

2. **a.** Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$.
b. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque $N \to \infty$.

11 ★ Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2.

1. Déterminer les réels a minimisant la quantité $\mathbb{E}\big((X-a)^2\big)$.

2. On suppose X à valeurs dans $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$ réels). Montrer que $\mathbb{V}(X) \leqslant (\beta-\alpha)^2$.

12 ✎ On lance simultanément deux dés à 6 faces jusqu'à ce que chaque dé ait fait apparaître au moins une fois la face 6. On note X_1 (resp. X_2) le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un 6 avec le premier dé (resp. le deuxième).

1. **a.** Quelles sont les lois des variables X_i ?
b. Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leqslant k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Soit X la variable égale au nombre de lancers (d'un couple de dés) nécessaires avant d'avoir observé l'apparition d'au moins un 6 sur chacun des dés (mais pas nécessairement un double 6).
a. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$.
b. En déduire la loi de X.
c. Déterminer, si elle existe, l'espérance de X.

13 On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec probabilité $\frac{1}{2}$. On note P_k (resp. F_k) l'événement « on obtient pile (resp. face) au k-ième lancer ».
On note X la variable aléatoire prenant la valeur k si on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k, ou 0 si cette configuration n'apparaît jamais.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.

2. **a.** Décomposer l'événement $[X = 3]$ en fonction des événements primaires P_i, F_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 3)$.
b. Calculer plus généralement, sur le même principe, $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \geqslant 2$.
c. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

3. **a.** Montrer que :
$$\forall k \geqslant 3, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X = k-1) + \frac{1}{2^k}.$$
b. Vérifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite de terme général $a^k\,\mathbb{P}(X = k)$, $k \geqslant 2$, soit arithmétique, et retrouver l'expression de $\mathbb{P}(X = k)$.

4. Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et la calculer.

14 ✎ Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$ et $Z = 2^X$.

15 ✎ Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Le compteur chargé d'afficher la valeur de X est défaillant :
- lorsque X est non nul, il affiche la valeur de X ;
- lorsque X est nul, il affiche une valeur entière choisie aléatoirement entre 1 et n.

On note Y la valeur affichée par le compteur. Justifier que Y admet une espérance et la calculer.

16 ✎ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = -n) = \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement $[X = -n] \cup [X = n]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet une espérance conditionnelle relative à A_n. Étudier la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{E}(X \mid A_n)$.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

17 Un ascenseur dessert $n \geqslant 1$ étages d'un immeuble. Lors d'un voyage, on note X le nombre de personnes qui montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée ; on admet que X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On émet les hypothèses suivantes :
- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez-de-chaussée.
- Chaque personne choisit son étage au hasard et indépendamment des autres passagers. Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur.

On note S le nombre d'arrêts de l'ascenseur lors d'un voyage donné (on ne compte pas l'arrêt initial au rez-de-chaussée).

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1, n]\!]$, montrer que :
$$\mathbb{P}(S = j \mid X = k+1) = \frac{j}{n}\,\mathbb{P}(S = j \mid X = k) + \frac{n-j+1}{n}\,\mathbb{P}(S = j-1 \mid X = k)\,.$$
Indication. On pourra considérer les événements $A_{k,j}$: « l'ascenseur compte au moins k passagers et les k premiers sélectionnent j étages distincts ».

2. Après avoir justifié l'existence des espérances conditionnelles, montrer que :
$$\mathbb{E}(S \mid X = k+1) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathbb{E}(S \mid X = k)\,.$$

3. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espérance de S sachant que $X = k$.

4. En déduire que $\mathbb{E}(S) = n(1 - \mathbf{e}^{-\lambda/n})$.

18 ♣ En utilisant une pièce déséquilibrée dont la probabilité d'apparition de « pile » est $p \in \,]0, 1[$, deux joueurs A et B s'affrontent selon les modalités suivantes : un des deux

joueurs lance la pièce jusqu'à obtenir « pile » pour la première fois. Notant r le nombre de tirages nécessaires, les joueurs lancent alternativement la pièce, en commençant par le joueur B. Le joueur qui obtient le r-ième « pile » de cette nouvelle série de lancers donne k euros à l'autre joueur, où k est le nombre de tirages effectués lors de cette seconde série de lancers pour obtenir le r-ième « pile ».
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier « pile » lors de la première série de lancers et Y le gain du joueur A à l'issue de la partie, éventuellement négatif si A a perdu.

1. Déterminer la loi de X. Quelle est son espérance et sa variance ?

2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
  a. Déterminer la loi de $|Y|$ conditionnée à l'événement $[X = r]$ puis celle de Y.
  b. Déterminer l'espérance de $|Y|$ sachant $[X = r]$.
  c. Déterminer l'espérance de Y sachant $[X = r]$.

3. En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.

19 ✎ Deux joueurs lancent chacun n fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité que les deux séries de lancers comportent le même nombre de pile.

20 ★ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. On suppose que X suit une loi géométrique.
Montrer que :
$$\forall n, h \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{[X>n]}(X > n + h) = \mathbb{P}(X > h). \qquad (\star)$$
On dit que la loi géométrique est sans mémoire.

2. Réciproquement, on suppose que la condition $(\star)$ est vérifiée.
  a. Montrer que la suite $\big(\mathbb{P}(X > n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = \mathbb{P}(X > 1)$.
  b. En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

21 ★ *Cet exercice utilise la notion d'indépendance de variables aléatoires discrètes.*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \inf(X, Y)$.

22 Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par :
$$Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si X est pair} \\ \frac{X+1}{2} & \text{si X est impair} \end{cases}.$$

23 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer les valeurs de k (appelées *modes* de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$) qui maximisent la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, déterminer les valeurs de λ qui maximisent la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$.

3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{E}\big(|X - \lambda|\big) = \frac{2\lambda^\lambda \mathbf{e}^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!}.$$

24 **1.** Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$J_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x \mathbf{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t.$$
  a. Déterminer une relation entre $J_n(x)$ et $J_{n+1}(x)$.
  b. En déduire une expression explicite de $J_n(x)$.

2. En déduire que si X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} \mathbf{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t.$$

25 ★ **Loi de Pascal et loi binomiale négative**
On considère un processus binomial de paramètre $p \in \,]0, 1[$, c'est-à-dire une suite d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec probabilité p et à un échec avec probabilité $q = 1 - p$.
Dans tout l'exercice, on fixe un entier $r > 0$.

1. On note X_r le rang d'apparition du r-ième succès.
  a. Que dire de X_1 ?
  b. Quel est l'ensemble V des valeurs que X_r peut prendre ?
  c. Pour tout $k \in V$, calculer $\mathbb{P}(X_r = k)$.

2. **a.** Calculer
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} \overline{S_k}\Big)$$
où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, S_k désigne l'événement « la k-ième épreuve est un succès ».
En déduire que X_r est une variable aléatoire. On dit que X_r suit la *loi de Pascal* de paramètre (r, p).
  b. En déduire une démonstration de la formule du binôme négatif.
  c. Calculer $\mathbb{E}(X_r)$.
  d. Calculer $\mathbb{E}\big(X_r(X_r + 1)\big)$ et en déduire $\mathbb{V}(X_r)$.

3. On note Y_r la variable aléatoire donnant le nombre d'échecs précédant le r-ième succès.
  a. Quelle relation a-t-on entre X_r et Y_r ?
  b. En déduire la loi de Y_r, son espérance et sa variance.
  c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le coefficient binomial généralisé
$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$
Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k + r - 1}{k} = (-1)^k\binom{-r}{k}$$

et en déduire que :

$$\mathbb{P}(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$

On dit que Y_r suit la *loi binomiale négative* de paramètre (r, p).

26 **Tirages sans remise**
★ On considère une urne contenant N boules, blanches ou noires, dont une proportion p de boules blanches. On note $q = 1 - p$ la proportion de boules noires.

1. On effectue dans cette urne n tirages sans remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.
Montrer que X est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ avec :
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$
La loi de X est appelée *loi hypergéométrique* $\mathcal{H}(N, n, p)$.
2. On suppose dans cette question que des tirages sans remise sont effectués jusqu'à ce que l'urne soit vide. Pour $r \in [\![1, Np]\!]$, on note X_r le rang d'apparition de la r-ième boule blanche.
Montrer que X_r est à valeurs dans $[\![r, Nq + r]\!]$ avec :
$$\forall k \in [\![r, Nq + r]\!], \quad \mathbb{P}(X_r = k) = \frac{r}{k}\,\frac{\binom{Np}{r}\binom{Nq}{k-r}}{\binom{N}{k}}.$$

27 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
★♣
1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k)\right) + (n+1)\,\mathbb{P}(X > n).$$
2. En déduire que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_k \mathbb{P}(X > k)$ converge, avec dans ce cas :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$
3. Retrouver directement le résultat (caractérisation et formule) de la question précédente à partir de manipulation sur des séries doubles.
4. Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue $n+1$ tirages successifs d'une boule avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note également, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.
   a. Justifier que X_n est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
   b. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n+1)$.
   c. Pour $k \in [\![2, n]\!]$, justifier que $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \cdots > N_k]$ et en déduire que :
   $$\mathbb{P}(X_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}.$$
   Vérifier que la formule est encore valable pour $k = 0$ et $k = 1$.
   d. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $0 \leqslant X \leqslant Y$. En utilisant le résultat établi en **2.**, montrer que si Y admet une espérance, alors X aussi.

28 **Lemme de Borel-Cantelli**
★ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que
$$B = \bigcap_{n\geqslant 1}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right).$$

1. Soit $\omega \in \Omega$. Justifier que ω appartient à B si, et seulement si, il appartient à A_n pour une infinité de valeurs de n.
2. On suppose que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.
3. On suppose que les événements A_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont indépendants et que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
   a. Exprimer $\overline{B}$ en fonction des A_k.
   b. Exprimer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.
   c. Montrer que la série $\sum_k \ln(1 - p_k)$ est divergente.
   d. En déduire que $\mathbb{P}(B) = 1$.
4. Soient α un réel strictement positif et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$.
   a. Montrer que $\mathbb{E}(X_n)$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$.
   b. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'il existe presque sûrement une infinité de valeurs de n pour lesquelles $X_n = 1$.
   c. On suppose que $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe presque sûrement un rang à partir duquel $X_n = 0$.

Programmation :
- ➢ Classe : 1, 5, (2), 8, 10, 11, 15, 16, 19, 20
- ➢ TD : 4, 6, 12, 7, 14
- ➢ TD★ : 27, 28, 9, 25