

**Travaux dirigés**  
Probabilités générales et discrètes

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2019/2020

www.rbfid.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      1 / 78

Exercice 1      Q 1

### Exercice 1

Question 1

On a équiprobabilité sur l'univers  $\Omega_n$  formé des  $n$ -listes  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  d'éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  où, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\omega_i$  représente le numéro de la boîte dans laquelle on a rangé la  $i$ -ième boule.

L'univers  $\Omega_n$  est de cardinal  $\#\Omega_n = n^n$ .

L'événement étudié  $A_n$  est formé des éventualités  $\omega$  pour lesquelles les  $\omega_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont deux-à-deux distincts, c'est-à-dire des arrangements de  $n$  éléments parmi  $n$ , qui sont au nombre de  $n!$ .

Dans ces conditions,

$$p_n = \mathbb{P}(A_n) = \frac{\#A_n}{\#\Omega_n} = \frac{n!}{n^n}.$$

*Remarque.* En identifiant les éléments de  $\Omega_n$  à des applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même, ceux de  $A_n$  correspondent aux applications injectives, c'est-à-dire bijectives puisque les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal. Le cardinal de  $A_n$  est donc le nombre de permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

www.rbfid.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      2 / 78

Exercice 1      Q 2.a

### Exercice 1

Question 2.a

D'après l'expression obtenue en 1., il vient :

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

En s'appuyant sur la formule du binôme de Newton, on obtient l'inégalité classique :

$$\forall x \geq 0, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \geq \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} x^k = 1 + nx$$

qui donne ici :

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

www.rbfid.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      3 / 78

Exercice 1      Q 2.b

### Exercice 1

Question 2.b

D'après a., on a  $p_{n+1} \leq \frac{1}{2} p_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ce qui implique, par une récurrence immédiate, que  $p_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} p_1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il en ressort que  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

www.rbfid.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      4 / 78

Exercice 2      Q 1

### Exercice 2

Question 1

Si le jeu n'est pas fini au bout de  $2n$  parties et si l'on note  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) le nombre de victoires de  $A$  (resp.  $B$ ) au cours des  $2n$  parties, alors  $|\alpha - \beta| \leq 1$ . Sachant que  $\alpha + \beta = 2n$  est pair, on en déduit que  $\alpha - \beta = (\alpha + \beta) - 2\beta$  est lui aussi pair et l'on a donc nécessairement  $\alpha - \beta = 0$  i.e.  $\alpha = \beta$  : les joueurs  $A$  et  $B$  sont à égalité.

www.rbfid.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      5 / 78

Exercice 2      Q 2

### Exercice 2

Question 2

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  l'événement « le joueur  $A$  remporte la  $k$ -ième partie » (ce qui suppose que celle-ci ait bien lieu) et on définit de même  $B_k$ .

D'après la question 1., l'événement  $C_{n+1}$  est réalisé si, et seulement si, l'événement  $C_n$  est réalisé et  $A$  et  $B$  gagnent chacun l'une des parties numérotées  $2n+1$  et  $2n+2$ . En d'autres termes,

$$C_{n+1} = C_n \cap ((A_{2n+1} \cap B_{2n+2}) \cup (B_{2n+1} \cap A_{2n+2}))$$

mais les événements  $A_{2n+1}$ ,  $B_{2n+1}$ ,  $A_{2n+2}$  et  $B_{2n+2}$  ne sont pas indépendants de  $C_n$ . On peut toutefois écrire :

$$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n) \mathbb{P}_{C_n}((A_{2n+1} \cap B_{2n+2}) \cup (B_{2n+1} \cap A_{2n+2})).$$

www.rbfid.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      6 / 78

Exercice 2      Q 2

### Exercice 2

On poursuit le calcul en utilisant l'incompatibilité des événements  $A_{2n+1} \cap B_{2n+2}$  et  $B_{2n+1} \cap A_{2n+2}$  :

$$p_{n+1} = p_n (\mathbb{P}_{C_n}(A_{2n+1} \cap B_{2n+2}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{2n+1} \cap A_{2n+2}))$$

puis l'indépendance de  $A_{2n+1}$  et  $B_{2n+2}$  conditionnellement à  $C_n$  (c'est-à-dire sachant que les parties  $2n+1$  et  $2n+2$  sont jouées) :

$$p_{n+1} = p_n (\mathbb{P}_{C_n}(A_{2n+1}) \mathbb{P}_{C_n}(B_{2n+2}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{2n+1}) \mathbb{P}_{C_n}(A_{2n+2})) = \varrho p_n$$

où  $\varrho = 2p(1-p)$ .

La suite  $(p_n)$  est donc géométrique de raison  $\varrho$  et de premier terme  $p_0 = 1$  d'où l'on déduit que  $p_n = \varrho^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

www.rbfid.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      7 / 78

Exercice 2      Q 3

### Exercice 2

Question 3

On note  $V^A$  l'événement «  $A$  emporte la victoire » et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $V_n^A$  l'événement «  $A$  emporte la victoire au bout de  $2n$  parties ».

D'après la question 1., l'événement  $V_n^A$  est réalisé si, et seulement si, les joueurs sont à égalité après  $2n-2$  parties puis  $A$  remporte les deux parties suivantes. Pour les mêmes raisons qu'en 2., on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_n^A) &= \mathbb{P}(C_{n-1} \cap A_{2n-1} \cap A_{2n}) \\ &= \mathbb{P}(C_{n-1}) \mathbb{P}_{C_{n-1}}(A_{2n-1}) \mathbb{P}_{C_{n-1}}(A_{2n}) \\ &= p_{n-1} p^2 = p^2 \varrho^{n-1}. \end{aligned}$$

www.rbfid.fr      Travaux dirigés      Année 2019/2020      8 / 78

Exercice 2 Q 3

Étant entendu, pour des raisons évidentes, que

$$V^A = \bigcup_{n \geq 1} V_n^A$$

où l'union est disjointe, il vient :

$$\mathbb{P}(V^A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(V_n^A) = \sum_{n=1}^{\infty} p^2 \varrho^{n-1} = \frac{p^2}{1-\varrho}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 9 / 78

Exercice 2 Q 4

### Exercice 2

Question 4

On montrera de même que l'événement  $V^B$  « le joueur  $B$  est victorieux » a pour probabilité

$$\mathbb{P}(V^B) = \frac{(1-p)^2}{1-\varrho}.$$

Les deux événements  $V^A$  et  $V^B$  sont bien entendu incompatibles et l'on a donc d'après les formules précédentes :

$$\mathbb{P}(V^A \cup V^B) = \frac{p^2 + (1-p)^2}{1-\varrho} = 1.$$

L'événement  $V^A \cup V^B$ , qui se produit si, et seulement si, l'un des joueurs  $A$  et  $B$  finit par l'emporter, est donc certain.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 10 / 78

Exercice 4 Q 1

### Exercice 4

Question 1

Pour  $k \in [0, N]$ , on note  $U_k$  l'événement « choisir l'urne  $k$  », de probabilité  $\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{N+1}$  puisque l'urne est choisie au hasard parmi  $N$ . Les événements  $U_0, \dots, U_N$  formant un système complet, la probabilité de l'événement  $A_N$  « obtenir  $n$  boules blanches au cours des  $n$  tirages » est donnée par :

$$\mathbb{P}(A_N) = \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(U_k) \mathbb{P}_{U_k}(A_N)$$

d'après la formule des probabilités totales. Or, pour  $k \in [0, N]$ , si l'événement  $U_k$  est réalisé, alors les  $n$  tirages sont indépendants et amènent chacun une boule blanche avec probabilité  $\frac{k}{N}$ , d'où :

$$\mathbb{P}_{U_k}(A_N) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 11 / 78

Exercice 4 Q 2

### Exercice 4

Question 2

On peut écrire  $\mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{N+1} S_N$  où

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

est une somme de Riemann associée à la fonction  $f : x \mapsto x^n$  sur  $[0, 1]$ . La fonction  $f$  étant continue sur le segment  $[0, 1]$ , on a par théorème

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

En conclusion,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{n+1}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 12 / 78

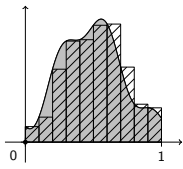
Exercice 4 Q 2

### Rappels sur les sommes de Riemann (zoom)

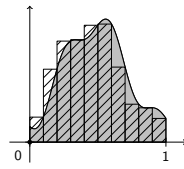
**Théorème (Sommes de Riemann ou méthode des rectangles)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On a :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$



rectangles gauche



rectangles droite

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 13 / 78

Exercice 4 Q 2

### Rappels sur les sommes de Riemann

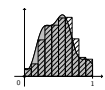
**Théorème (Sommes de Riemann ou méthode des rectangles)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On a :

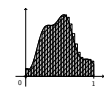
$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

En particulier, si  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , on a :

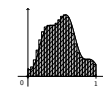
$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$



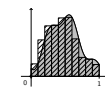
rectangles gauche  
 $n = 10$



rectangles gauche  
 $n = 25$



rectangles droite  
 $n = 25$



rectangles droite  
 $n = 10$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 14 / 78

Exercice 5 Q 1

### Exercice 5

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'événement  $P_n$  : « le  $n$ -ième lancer renvoie pile » a pour probabilité  $p$ . Le théorème de la limite monotone assure que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \overline{P}_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{P}_k\right)$$

c'est-à-dire, puisque les événements  $P_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \overline{P}_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{P}_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^n = 0.$$

L'événement

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{P}_n = \bigcup_{n \geq 1} P_n$$

est donc certain, or cet événement est réalisé si, et seulement si, l'un des lancers renvoie pile, d'où le résultat.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 15 / 78

Exercice 6 Q 1

### Exercice 6

Question 1

Pour tout  $k \geq 1$ , on note  $C_k$  l'événement « le candidat est invité à répondre à la  $k$ -ième question et y apporte une réponse correcte ».

La variable  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  car le candidat répond presque sûrement correctement à la première question.

Pour  $k \geq 2$ , l'événement  $[X = k]$  est réalisé si, et seulement si, le candidat apporte une réponse correcte aux  $k-1$  premières questions et une réponse incorrecte à la  $k$ -ième :

$$[X = k] = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{k-1} \cap \overline{C}_k.$$

D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(C_1) \mathbb{P}(C_2) \mathbb{P}_{C_1 \cap C_2}(C_3) \dots \mathbb{P}_{C_1 \cap \dots \cap C_{k-2}}(C_{k-1}) \mathbb{P}_{C_1 \cap \dots \cap C_{k-1}}(\overline{C}_k).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 16 / 78

Or, pour  $j \geq 2$ , si l'événement  $C_1 \cap \dots \cap C_{j-1}$  est réalisé, i.e. si le candidat est invité à répondre à la  $j$ -ième question, alors l'événement  $C_j$  est réalisé avec probabilité  $\frac{1}{j}$  par hypothèse :

$$\mathbb{P}_{C_1 \cap \dots \cap C_{j-1}}(C_j) = \frac{1}{j}.$$

On a donc pour  $k \geq 2$  :

$$\mathbb{P}(X = k) = \left( \prod_{j=2}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \left( 1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{(k-1)!} \left( 1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}.$$

Remarque. Il apparaît que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = 1,$$

ce qui légitime la définition de la *variable aléatoire*  $X$  : bien qu'on ne lui ait pas attribué de valeur lorsque le candidat répond correctement à toutes les questions, cet événement ne se produit presque jamais.

## Exercice 6

### Question 2

Les séries ci-dessous convergent absolument par opérations sur les séries exponentielles, si bien que  $X$  admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=2}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k \left( \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e. \end{aligned}$$

## Exercice 7

### Question 1

La distribution proposée est positive avec, d'après la formule d'absorption :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = \frac{a}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{a}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

Puisque c'est une loi de probabilité, la somme précédente est égale à 1 si bien que

$$a = \frac{n+1}{2^{n+1} - 1}.$$

## Exercice 7

### Question 2

D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X+1) = \sum_{k=0}^n (k+1) \mathbb{P}(X = k) = a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = a 2^n$$

d'où

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X+1) - 1 = a 2^n - 1 = \frac{(n-1)2^n + 1}{2^{n+1} - 1}.$$

## Exercice 7

### Question 3

Toujours par transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X+1)) &= \sum_{k=0}^n k(k+1) \mathbb{P}(X = k) = a \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \\ &= a \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = a n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = a n 2^{n-1} \end{aligned}$$

d'où, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)2^{n-1}(2^{n+1} - n - 2)}{(2^{n+1} - 1)^2}.$$

## Exercice 8

### Question 1

La variable aléatoire  $N$  donne le temps d'attente du premier succès (apparition d'un « pile ») lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $\frac{1}{2}$ . Elle suit donc une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

et admet espérance et variance données par  $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) = 2$ .

## Exercice 8

### Question 2.a

Si, pour un entier  $n \geq 1$  donné, l'événement  $[N = n]$  est réalisé, alors la variable  $X$  compte le nombre de succès (apparition de « pile ») dans une succession de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $\frac{1}{2}$ . La variable  $X$  suit donc une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$  pour la probabilité  $\mathbb{P}_{[N=n]}$  : elle est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  avec

$$\forall k \in [0, n], \quad \mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = \binom{n}{k} \left( \frac{1}{2} \right)^k \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

alors bien sûr que  $\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = 0$  pour  $k > n$ .

## Exercice 8

### Question 2.b

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Conditionnellement à l'événement  $[N = n]$ , la variable  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$  donc admet pour espérance

$$\mathbb{E}(X | N = n) = \frac{n}{2}.$$

Puisque la série ci-dessous (géométrique dérivée de raison appartenant à  $] -1, 1[$ ) converge et que  $X \geq 0$ , la formule de l'espérance totale peut être appliquée au système complet associé à la variable  $N$  et donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{E}(X | N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{\left( 1 - \frac{1}{2} \right)^2} = 1. \end{aligned}$$

Exercice 8 Q 3

### Exercice 8

Question 3

La variable  $X$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable  $N$  donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{1}{4^k k!} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{4^k k!} \frac{k!}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k+1}} = \frac{4}{3^{k+1}}. \end{aligned}$$

Le cas  $k = 0$  doit être traité à part :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 = \frac{1}{3}.$$

Remarque. On peut vérifier que  $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 25 / 78

Exercice 8 Q 3

Vu la convergence absolue des séries géométriques dérivées de raison appartenant à  $] -1, 1[$ ,  $X$  admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{3^{k+1}} = \frac{4}{9} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{4}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = 1.$$

On justifie de même l'existence de :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X+1)) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \mathbb{P}(X = k) = \frac{4}{9} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{4}{9} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} = 3 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit celle de

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 1.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 26 / 78

Exercice 9 Q 1

### Exercice 9

Question 1

On suppose  $r = 1$  et on introduit les événements  $B_k$  : « le  $k$ -ième tirage renvoie la boule blanche »,  $1 \leq k \leq n$ .  
La variable  $X$  prend ses valeurs dans  $[1, N]$  avec

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{N},$$

puis

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{N-1}{N} \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 27 / 78

Exercice 9 Q 1

et, plus généralement pour  $k \in [2, N]$  d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k) \\ &= \mathbb{P}(\overline{B_1}) \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \mathbb{P}_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(\overline{B_3}) \cdots \mathbb{P}_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}}) \mathbb{P}_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}}}(B_k) \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N-1} \frac{N-3}{N-2} \cdots \frac{N-k+1}{N-k+2} \frac{1}{N-k+1} = \frac{1}{N} \end{aligned}$$

En conclusion,  $X$  suit la loi uniforme sur  $[1, N]$ . Elle admet donc espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{N^2-1}{12}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 28 / 78

Exercice 9 Q 1

Dans le cas où  $r = N$ , la variable  $X$  est constante égale à  $N$ . Elle admet espérance et variances données par :

$$\mathbb{E}(X) = N \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 29 / 78

Exercice 9 Q 2.a

### Exercice 9

Question 2.a

La variable  $X$  est à valeurs dans  $[r, N]$ .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 30 / 78

Exercice 9 Q 2.b

### Exercice 9

Question 2.b

On peut considérer qu'on a équiprobabilité sur l'univers  $\Omega$  des suites formées de  $N$  termes parmi  $B$  ou  $\overline{B}$  (signifiant blanc ou noir) dont exactement  $r$  sont égaux à  $B$ . Choisir une telle suite revient à déterminer l'emplacement des  $r$  termes  $B$  parmi les  $N$  positions possibles. Elles sont donc au nombre de  $\binom{N}{r}$ .

Pour  $k \in [r, N]$  donné, l'événement  $[X = k]$  est réalisé si, et seulement si, la suite donnant le résultat de l'expérience contient  $r-1$  termes  $B$  avant la  $k$ -ième position, un terme  $B$  en  $k$ -ième position puis seulement des termes  $\overline{B}$ . Ces suites sont au nombre de  $\binom{k-1}{r-1}$  : il y en a autant que de façons de choisir l'emplacement des  $r-1$  premiers termes  $B$  parmi les  $k-1$  premières positions. Sa probabilité vaut donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 31 / 78

Exercice 9 Q 3

### Exercice 9

Question 3

La variable finie  $X$  admet une espérance donnée, d'après la formule d'absorption, par

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N k \binom{k-1}{r-1} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \binom{N+1}{r+1} = \frac{r(N+1)}{r+1}$$

où la formule

$$\forall N \geq r, \quad \sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \binom{N+1}{r+1}$$

peut être justifiée par récurrence sur  $N \geq r$  ou par un raisonnement combinatoire (dénombrer l'ensemble des suites de  $\{B, \overline{B}\}^{N+1}$  contenant  $r+1$  termes  $B$  en détaillant selon la position du dernier).

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 32 / 78

Exercice 10 Q 1

### Exercice 10

Question 1

On a  $Z_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$  où, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_j$  est le numéro de la boule obtenue au  $j$ -ième tirage. Par hypothèse, les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  suivent toutes une loi uniforme sur  $\llbracket 1, N \rrbracket$  et sont indépendantes puisque les tirages sont effectués avec remise.

Pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on a par indépendance de  $X_1, \dots, X_n$  :

$$\mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, \dots, X_n \leq k) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

La variable aléatoire  $Z_n$  étant à valeurs dans  $\llbracket 0, N \rrbracket$ , on notera que la formule précédente est encore valable pour  $k = 0$ . On peut donc écrire, pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n \leq k) - \mathbb{P}(Z_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 33 / 78

Exercice 10 Q 2.a

### Exercice 10

Question 2.a

La variable aléatoire  $Z_n$  étant finie, elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=1}^N k \left( \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{N^n} \left( \sum_{k=1}^N k^{n+1} - \sum_{k=2}^N k(k-1)^n \right) = \frac{1}{N^n} \left( \sum_{k=1}^N k^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1} (k+1)k^n \right) \\ &= \frac{1}{N^n} \left( N^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1} k^n \right) = N - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 34 / 78

Exercice 10 Q 2.b

### Exercice 10

Question 2.b

On a donc  $\mathbb{E}(Z_n) = N(1 - S_N)$  où

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

est une somme de Riemann associée à la fonction  $f : x \mapsto x^n$  sur  $[0, 1]$ . La fonction  $f$  étant continue sur le segment  $[0, 1]$ , on a par théorème

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte que

$$\mathbb{E}(Z_n) \sim N \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{n+1} N, \quad N \rightarrow \infty.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 35 / 78

Exercice 11 Q 1

### Exercice 11

Question 1

**Première méthode**

On développe :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}((X - a)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2aX + a^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2a\mathbb{E}(X) + a^2$$

puis on étudie la fonction  $a \mapsto \mathbb{E}((X - a)^2)$ . C'est une fonction polynomiale du second degré qui atteint son minimum pour  $a = \mathbb{E}(X)$ , égal à

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{V}(X).$$

Ainsi,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{V}(X) \leq \mathbb{E}((X - a)^2).$$

*Remarque.* Le résultat peut être démontré directement en écrivant, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X - a) = \mathbb{E}((X - a)^2) - \mathbb{E}(X - a)^2 \leq \mathbb{E}((X - a)^2).$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 36 / 78

Exercice 11 Q 2

### Exercice 11

Question 2

**Deuxième méthode**

Le résultat peut être démontré directement : en posant  $m = \mathbb{E}(X)$  il vient, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$(X - a)^2 = ((X - m) + (m - a))^2 = (X - m)^2 + 2(X - m)(m - a) + (m - a)^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - a)^2) &= \mathbb{E}((X - m)^2) + 2(m - a)\mathbb{E}(X - m) + (m - a)^2 \\ &= \mathbb{V}(X) + (m - a)^2 \end{aligned}$$

car  $\mathbb{E}(X - m) = \mathbb{E}(X) - m = 0$ . Il est alors clair que la fonction est minimale pour  $a = m$  c'est-à-dire  $a = \mathbb{E}(X)$ , de valeur  $\mathbb{V}(X)$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 37 / 78

Exercice 11 Q 2

### Exercice 11

Question 2

La question précédente assure que

$$\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{E}((X - \alpha)^2) \leq \mathbb{E}((\beta - \alpha)^2) = (\beta - \alpha)^2$$

car  $0 \leq X - \alpha \leq \beta - \alpha$ .

*Remarque.* On peut avoir mieux en écrivant :

$$\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{E} \left[ \left( X - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 \right] \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{4}$$

sachant que  $\left| X - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \leq \frac{\beta - \alpha}{2}$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 38 / 78

Exercice 12 Q 1.a

### Exercice 12

Question 1.a

Chacune des variables  $X_1$  et  $X_2$  donne le temps d'attente du premier succès (obtenir un 6) dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $\rho = \frac{1}{6}$ , et suit donc à ce titre une loi géométrique de paramètre  $\rho$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 39 / 78

Exercice 12 Q 1.b

### Exercice 12

Question 1.b

Pour  $k = 0$  tout d'abord, on a  $\mathbb{P}(X_i \leq k) = 0$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\mathbb{P}(X_i \leq k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(X_i = j) = \sum_{j=1}^k \rho q^{j-1} = \rho \frac{1 - q^k}{1 - q} = 1 - q^k$$

où l'on a posé  $q = 1 - \rho = \frac{5}{6}$ . On peut remarquer que cette formule est encore valable pour  $k = 0$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 40 / 78

Exercice 12 Q 2.a

### Exercice 12

Question 2.a

On a  $X = \sup(X_1, X_2)$  donc, pour  $k \in \mathbb{N}$ , l'événement  $[X \leq k]$  est réalisé si, et seulement si,  $X_i \leq k$  pour tout  $i \in \{1, 2\}$ . En d'autres termes,

$$[X \leq k] = [X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k]$$

d'où :

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, X_2 \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k) \mathbb{P}(X_2 \leq k)$$

par indépendance des résultats du premier et du deuxième dé. Ainsi, d'après 1.b.,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X \leq k) = (1 - q^k)^2.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 41 / 78

Exercice 12 Q 2.b

### Exercice 12

Question 2.b

La variable  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  avec, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'union disjointe

$$[X \leq k - 1] \cup [X = k] = [X \leq k]$$

d'où l'on déduit que

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1).$$

Dès lors, vu la question 1.b. (même si  $k = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2 = (q^{k-1} - q^k)(2 - q^k - q^{k-1}) \\ &= pq^{k-1}(2 - q^k - q^{k-1}) = 2pq^{k-1} - pq^{2k-1} - pq^{2k-2}. \end{aligned}$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 42 / 78

Exercice 12 Q 2.c

### Exercice 12

Question 2.c

La variable  $X$  admet une espérance car la série ci-dessous est absolument convergente, par opérations sur les séries géométriques dérivées, toutes absolument convergentes car de raison appartenant à  $] -1, 1[$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(2pq^{k-1} - pq^{2k-1} - pq^{2k-2}) \\ &= 2p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} - p(q+1) \sum_{k=1}^{\infty} k(q^2)^{k-1} \\ &= \frac{2p}{(1-q)^2} - \frac{p(q+1)}{(1-q^2)^2} = \frac{96}{11} \simeq 8,7. \end{aligned}$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 43 / 78

Exercice 14 Q 1

### Exercice 14

Question 1

La variable  $Y = \frac{1}{X+1}$  étant finie, elle admet une espérance donnée, d'après le théorème de transfert, par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^k \quad \text{où } x = \frac{p}{1-p} > 0. \end{aligned}$$

On peut envisager plusieurs méthodes de calcul :

**Première méthode**  
D'après la formule d'absorption :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \frac{(1-p)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} x^k = \frac{(1-p)^n}{(n+1)x} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} x^{k+1} \\ &= \frac{(1-p)^n}{(n+1)x} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = \frac{(1-p)^n}{(n+1)x} ((1+x)^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 44 / 78

Exercice 14 Q 1

### Exercice 14

Question 1

**Deuxième méthode**  
En remarquant que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x t^k dt,$$

il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \frac{(1-p)^n}{x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^x t^k dt = \frac{(1-p)^n}{x} \int_0^x \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k \right) dt \\ &= \frac{(1-p)^n}{x} \int_0^x (1+t)^n dt = \frac{(1-p)^n}{x} \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}. \end{aligned}$$

Par l'une ou l'autre méthode, on obtient :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 45 / 78

Exercice 14 Q 2

### Exercice 14

Question 2

Pour les mêmes raisons, la variable  $Z = 2^X$  admet pour espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^n 2^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{2p}{1-p} \right)^k = (1-p)^n \left( 1 + \frac{2p}{1-p} \right)^n = (1+p)^n. \end{aligned}$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 46 / 78

Exercice 15

### Exercice 15

La variable  $Y$  étant finie, elle admet une espérance donnée, d'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements  $\{[X = 0], [X > 0]\}$ , par :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{E}(Y|X = 0) + \mathbb{P}(X > 0) \mathbb{E}(Y|X > 0)$$

où, conditionnellement à  $[X = 0]$ , la variable  $Y$  suit la loi uniforme sur  $[[1, n]]$ , si bien que

$$\mathbb{E}(Y|X = 0) = \frac{n+1}{2}.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 47 / 78

Exercice 15

### Exercice 15

Conditionnellement à  $[X > 0]$ , on a  $Y = X$  si bien que

$$\mathbb{E}(Y|X > 0) = \mathbb{E}(X|X > 0).$$

Pour calculer ce terme, on peut revenir à la définition :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 0) \mathbb{E}(X|X > 0) &= \mathbb{P}(X > 0) \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}_{[X > 0]}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X > 0] \cap [X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X) = np \end{aligned}$$

car  $[X = k] \subset [X > 0]$  pour  $k \geq 1$ , ou utiliser de nouveau la formule de l'espérance totale, cette fois à la variable  $X$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{E}(X|X = 0) + \mathbb{P}(X > 0) \mathbb{E}(X|X > 0) \\ &= \mathbb{P}(X > 0) \mathbb{E}(X|X > 0). \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\mathbb{E}(Y) = (1-p)^n \frac{n+1}{2} + np.$$

www.rhdf.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 48 / 78

Exercice 16 Q 1

### Exercice 16

Question 1

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  donné, la variable aléatoire  $X$  est presque sûrement finie (ne prend que les valeurs  $-n$  et  $n$ ) conditionnellement à  $A_n$  et admet donc à ce titre une espérance pour la probabilité  $\mathbb{P}_{A_n}$  :

$$\mathbb{E}(X|A_n) = n\mathbb{P}_{A_n}(X = n) - n\mathbb{P}_{A_n}(X = -n).$$

Puis, étant donné que  $[X = n] \subset A_n$ ,

$$\mathbb{P}_{A_n}(X = n) = \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)} = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = -n)} = \frac{1}{2}$$

et de même  $\mathbb{P}_{A_n}(X = -n) = \frac{1}{2}$ .  
On en déduit la valeur de  $\mathbb{E}(X|A_n) = 0$  et il en découle la convergence évidente de la série  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{E}(X|A_n)$ .

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 49 / 78

Exercice 16 Q 2

### Exercice 16

Question 2

Il s'agit d'examiner la convergence de la série positive

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n| \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n| \frac{1}{|n|(|n|+1)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|+1} \quad (*)$$

qui est divergente par comparaison à la série harmonique :

$$\frac{1}{|n|+1} \sim \frac{1}{n} \geq 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

La variable aléatoire  $X$  n'admet donc pas d'espérance.

*Remarque.* L'argument précédent établi en fait la divergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} u_n$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La divergence de la série (\*) s'en déduit car :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{|n|+1}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 50 / 78

Exercice 18 Q 1

### Exercice 18

Question 1

La variable  $X$  donne le temps d'attente du premier succès (apparition d'un « pile ») dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ . Elle suit donc une loi géométrique de paramètre  $p$  : elle est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$$

où l'on a noté  $q = 1 - p$ , et admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 51 / 78

Exercice 18 Q 2.a

### Exercice 18

Question 2.a

La variable  $|Y|$  indique le gain obtenu par le vainqueur. Elle prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

Conditionnellement à l'événement  $[X = r]$ , la variable  $|Y|$  donne le temps d'attente du  $r$ -ième succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ . D'après l'exercice 25, elle suit donc la loi de Pascal  $\mathcal{P}(r, p)$  : elle est à valeurs dans  $\llbracket r, +\infty \llbracket$  avec :

$$\forall k \geq r, \quad \mathbb{P}_{[X=r]}(|Y| = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 52 / 78

Exercice 18 Q 2.a

La valeur absolue de  $Y$  indique le gain obtenu par le vainqueur alors que son signe indique le vainqueur. Or, s'il y a un vainqueur après le  $k$ -ième lancer, il s'agit nécessairement de  $A$  si  $k$  est impair et de  $B$  si  $k$  est pair, de sorte que  $[|Y| = k] = [Y = (-1)^{k+1}k]$ .

La variable  $Y$  prend ainsi ses valeurs dans  $\{(-1)^{k+1}k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{[X=r]}(Y = (-1)^{k+1}k) = \mathbb{P}_{[X=r]}(|Y| = k) = \begin{cases} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} & \text{si } k \geq r \\ 0 & \text{si } k < r \end{cases}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 53 / 78

Exercice 18 Q 2.b

### Exercice 18

Question 2.b

Toujours d'après l'exercice 25,

$$\mathbb{E}(|Y||X = r) = \frac{r}{p}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 54 / 78

Exercice 18 Q 2.c

### Exercice 18

Question 2.c

Puisque  $|Y|$  admet une espérance conditionnellement à l'événement  $[X = r]$ , il en va de même de  $Y$  avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X = r) &= \sum_{k=r}^{\infty} (-1)^{k+1} k \mathbb{P}_{[X=r]}(Y = (-1)^{k+1}k) \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} (-1)^{k+1} k \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\ &= (-1)^{r+1} r p^r \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} (p-1)^{k-r} = \frac{(-1)^{r+1} r p^r}{(2-p)^{r+1}} \end{aligned}$$

d'après la formule d'absorption et celle du binôme négatif.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 55 / 78

Exercice 18 Q 3

### Exercice 18

Question 3

D'après les questions précédentes, la variable  $Y$  admet une espérance conditionnellement à  $[X = r]$  pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$  et la série

$$\sum_{r \geq 1} \mathbb{P}(X = r) \mathbb{E}(|Y||X = r) = \sum_{r \geq 1} r(1-p)^{r-1},$$

géométrique dérivée de raison  $1 - p \in ]-1, 1[$ , est convergente. Dans ces conditions, on peut donc appliquer la formule de l'espérance totale au système complet associé à la variable  $X$ , d'après laquelle  $Y$  admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = r) \mathbb{E}(Y|X = r) = \sum_{r=1}^{\infty} p(1-p)^{r-1} \frac{(-1)^{r+1} r p^r}{(2-p)^{r+1}} \\ &= \frac{p^2}{(2-p)^2} \sum_{r=1}^{\infty} r \left( \frac{p(p-1)}{2-p} \right)^{r-1} = \frac{p^2}{(2-p^2)^2}. \end{aligned}$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 56 / 78

## Exercice 19

Les variables  $X$  et  $Y$  donnant le nombre de pile dans chacune des deux séries suivent toutes deux la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$  car elles donnent le nombre de succès (apparition de pile) lors d'une suite de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès  $\frac{1}{2}$ .

On décompose l'événement considéré :

$$[X = Y] = \bigcup_{k=0}^n [X = k] \cap [Y = k]$$

où l'union est disjointe. Il en résulte, par indépendance des lancers des jeux des résultats de chaque joueur :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k)$$

et donc :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

On conclut en utilisant la formule de Vandermonde (hors-programme mais très classique) : pour  $a, b \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall n \in \llbracket 0, a+b \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

qu'on peut établir par un raisonnement combinatoire. Soit en effet  $E$  un ensemble de cardinal  $a+b$ . On considère une partie  $A$  de  $E$  de cardinal  $a$  et on note  $B$  son complémentaire, de cardinal  $b$ .

Pour  $n \in \llbracket 0, a+b \rrbracket$  donné, le coefficient binomial  $\binom{a+b}{n}$  représente le nombre de parties de  $E$  à  $n$  éléments. L'ensemble  $\mathcal{P}_n(E)$  de ces parties peut être décomposé en l'union disjointe suivante :

$$\mathcal{P}_n(E) = \bigcup_{k=0}^n \{X \in \mathcal{P}_n(E) : \text{Card}(X \cap A) = k\}.$$

Puis, pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  donné, choisir une partie de  $E$  de cardinal  $n$  formée d'exactly  $k$  éléments de  $A$  revient à choisir les  $k$  éléments qui la composent issus de  $A$  (ce qui représente  $\binom{a}{k}$  possibilités) puis les  $n-k$  éléments de  $B$  qui viennent s'y ajouter (ce qui représente  $\binom{b}{n-k}$  possibilités). Il y a donc  $\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$  telles parties, ce qui achève la démonstration.

En appliquant la formule de Vandermonde à  $a = b = n$ , on obtient la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

qui permet d'achever l'exercice :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

## Exercice 20

Question 1

Pour commencer, on calcule

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > k) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(X = j) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^k p q^{j-1} = 1 - p \frac{1 - q^k}{1 - q} = q^k \end{aligned}$$

où l'on a posé  $q = 1 - p$ .

Pour  $n, h \in \mathbb{N}^*$ , on a donc, étant donné que  $[X > n+h] \subset [X > n]$  :

$$\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n+h) = \frac{\mathbb{P}(X > n+h)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{q^{n+h}}{q^n} = q^h = \mathbb{P}(X > h).$$

## Exercice 20

Question 2.a

Pour  $n, h \in \mathbb{N}^*$ , on a par hypothèse :

$$\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n+h) = \frac{\mathbb{P}(X > n+h)}{\mathbb{P}(X > n)} = \mathbb{P}(X > h)$$

d'où, pour  $h = 1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > n+1) = \mathbb{P}(X > 1) \mathbb{P}(X > n) = q \mathbb{P}(X > n)$$

et la suite  $(\mathbb{P}(X > n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc géométrique de raison  $q = \mathbb{P}(X > 1)$ .

## Exercice 20

Question 2.b

Il résulte de la question a. que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1} \mathbb{P}(X > 1) = q^n.$$

On note que la formule précédente est encore valable pour  $n = 0$  puisque  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  par hypothèse.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'union disjointe

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]$$

donne alors (même pour  $n = 1$ ) :

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1} - q^n = (1-q)q^{n-1} = pq^{n-1}$$

où  $p = 1 - q$ . La variable  $X$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $p$ .

## Exercice 25

Question 1.a

La variable  $X_1$  donne le temps d'attente du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ . Elle suit donc une loi géométrique de paramètre  $p$  : elle est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$$

où l'on a noté  $q = 1 - p$ , et admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

## Exercice 25

Question 1.b

Le  $r$ -ième succès ne peut advenir avant la  $r$ -ième épreuve. La variable  $X_r$  est donc à valeurs dans  $\llbracket r, +\infty \rrbracket$ . On verra réciproquement dans la question suivante que toutes ces valeurs peuvent être prises par  $X_r$ .



Exercice 25 Q 1.c

### Exercice 25

Question 1.c

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_k$  l'événement « la  $k$ -ième épreuve est un succès ».

**Première méthode**

Pour  $k \geq r$  donné, l'événement  $[X_r = k]$  se produit si, et seulement si, la  $k$ -ième épreuve est un succès et, parmi les  $k-1$  précédentes,  $r-1$  sont des succès et les  $k-1-(r-1) = k-r$  autres sont des échecs.

L'événement  $[X_r = k]$  s'écrit donc comme l'union disjointe des événements

$$A_r = \left( \bigcap_{1 \leq i \leq k-1} S_i \right) \cap \left( \bigcap_{1 \leq i \leq k-1} \overline{S}_i \right) \cap S_k, \quad (*)$$

où  $I$  parcourt l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$  de cardinal  $r-1$ . Par indépendance des événements  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , chacun des événements  $(*)$  a pour probabilité  $\mathbb{P}(A_i) = p^r q^{k-r}$ . D'où finalement l'expression de :

$$\mathbb{P}(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 65 / 78

Exercice 25 Q 1.c

### Exercice 25

Question 1.c

**Deuxième méthode**

Pour  $k \geq 1$ , on note  $T_k$  la variable aléatoire donnant le nombre de succès observés au cours des  $k$  premières épreuves, qui suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(k, p)$ .

Pour  $k \geq r$  donné, on a  $[X_r = k] = [T_{k-1} = r-1] \cap S_k$  d'où, par indépendance des  $k-1$  premières épreuves avec la  $k$ -ième :

$$\mathbb{P}(X_r = k) = \mathbb{P}(T_{k-1} = r-1) \mathbb{P}(S_k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 66 / 78

Exercice 25 Q 2.a

### Exercice 25

Question 2.a

En notant, pour tout  $n \geq 1$ ,  $A_n = \bigcap_{k \geq n} \overline{S}_k$ , on observe que :

$$\forall n \geq 1, A_n = \overline{S}_n \cap A_{n+1} \subset A_{n+1}.$$

Le théorème de la limite monotone s'applique donc à la suite croissante  $(A_n)$  :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Or, par indépendance des épreuves,

$$\forall n \geq 1, \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} \overline{S}_k\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^N \overline{S}_k\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(\overline{S}_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} q^{N-n+1} = 0.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \overline{S}_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 67 / 78

Exercice 25 Q 2.a

### Exercice 25

Question 2.a

L'événement

$$\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \overline{S}_k$$

se réalise si, et seulement si, chacune des épreuves amène un échec à partir d'un certain rang. Il ressort donc du calcul précédent qu'au cours de la suite d'épreuves, on obtient presque sûrement une infinité de succès.

La variable  $X_r$  est donc bien définie.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 68 / 78

Exercice 25 Q 2.b

### Exercice 25

Question 2.b

D'après 1.d.,

$$\sum_{k \in \mathbb{V}} \mathbb{P}(X_r = k) = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.$$

Il ressort donc de la question a. que :

$$\sum_{k=r-1}^{\infty} \binom{k}{r-1} q^{k-(r-1)} = \frac{1}{(1-q)^r},$$

ce qui constitue la formule du binôme négatif, qui s'écrit aussi :

$$\sum_{k=r-1}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-r+2) q^{k-r+1} = \frac{(r-1)!}{(1-q)^r}.$$

Cette formule est ainsi établie pour tout  $r \geq 1$  et tout  $q \in ]0, 1[$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 69 / 78

Exercice 25 Q 2.c

### Exercice 25

Question 2.c

La série ci-dessous converge absolument comme série géométrique de raison  $q \in ]-1, 1[$ , ce qui établit l'existence de  $\mathbb{E}(X)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=r}^{\infty} k \mathbb{P}(X_r = k) = \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-r+1) q^{k-r} \\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{r!}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r}{p}. \end{aligned}$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 70 / 78

Exercice 25 Q 2.d

### Exercice 25

Question 2.d

On calcule comme précédemment, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_r(X_r + 1)) &= \sum_{k=r}^{\infty} (k+1)k \mathbb{P}(X_r = k) \\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r}^{\infty} (k+1)k \cdots (k-r+1) q^{k-r} \\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r+1}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-r+1) q^{k-(r+1)} \\ &= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{(r+1)!}{(1-q)^{r+2}} = \frac{r(r+1)}{p^2}. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence et la valeur de

$$\mathbb{V}(X_r) = \mathbb{E}(X_r^2) - \mathbb{E}(X_r)^2 = \mathbb{E}(X_r(X_r + 1)) - \mathbb{E}(X_r) - \mathbb{E}(X_r)^2 = \frac{rq}{p^2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 71 / 78

Exercice 25 Q 3.a

### Exercice 25

Question 3.a

Par définition, on a  $r + Y_r = X_r$ , d'où  $Y_r = X_r - r$ .

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 72 / 78

Exercice 25 Q 3.b

### Exercice 25

Question 3.b

On déduit immédiatement des questions précédentes que  $Y_r$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_r = k) = \mathbb{P}(X_r = r + k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^k,$$

qu'elle admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(Y_r) = \mathbb{E}(X_r) - r = \frac{rq}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_r) = \mathbb{V}(X_r) = \frac{rq}{p^2}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 73 / 78

Exercice 25 Q 3.c

### Exercice 25

Question 3.c

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on obtient en inversant l'ordre des facteurs :

$$\begin{aligned} \binom{k+r-1}{k} &= \frac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots(r+1)r}{k!} = \frac{r(r+1)\cdots(k+r-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{-r}{k}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 74 / 78

Exercice 27 Q 1

### Exercice 27

Question 1

Il vient, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^n k (\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1) - k) \mathbb{P}(X > k) - n \mathbb{P}(X > n) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k) - (n+1) \mathbb{P}(X > n), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 75 / 78

Exercice 27 Q 2

### Exercice 27

Question 2

On raisonne par double implication.

- On suppose dans un premier temps que la série  $\sum_k \mathbb{P}(X > k)$  converge. On a dans ce cas, d'après 1.,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k) - (n+1) \mathbb{P}(X > n) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k). \end{aligned}$$

Ainsi les sommes partielles de la série  $\sum_k k \mathbb{P}(X = k)$  sont majorées, et comme cette série est à termes positifs, cela suffit pour assurer sa convergence et donc sa convergence absolue : la variable  $X$  admet une espérance.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 76 / 78

Exercice 27 Q 2

- Réciproquement, on suppose que  $X$  admet une espérance. On note pour commencer que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) \mathbb{P}(X > n) &= (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

car la convergence de la série  $\sum_k \mathbb{P}(X = k)$  entraîne celle de son reste vers 0. Il en résulte par encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \mathbb{P}(X > n) = 0.$$

Il ressort alors de la formule obtenue en 1. que la série  $\sum_k \mathbb{P}(X > k)$  converge avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X),$$

ce qui achève la démonstration.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 77 / 78

Exercice 27 Q 2

*Remarque.* On n'a pas toujours

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \mathbb{P}(X > n) = 0$$

et cette propriété n'est pas suffisante pour assurer l'existence de  $\mathbb{E}(X)$ . Pour le mettre en évidence, on pourra démontrer le résultat suivant et l'appliquer aux suites définies par

$$\forall n \geq 1, \quad q_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \left( \text{resp. } \forall n \geq 2, \quad q_n = \frac{1}{n \ln n} \right).$$

**Théorème** Soit  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $[0, 1]$ , décroissante et de limite nulle.

Il existe une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X > n) = q_n.$$

Il suffit de justifier qu'il existe une variable  $X$  telle que

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - q_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = q_{n-1} - q_n$$

puis de vérifier qu'une telle variable convient.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 78 / 78