Séries
Feuille d'exercices

1 ✎ Déterminer la nature des séries dont les termes généraux suivent :

1. $\dfrac{1}{\ln n}$;

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/n} \sin^\alpha t \,\mathrm{d}t$, $\alpha \geqslant 0$;

3. $\ln\left(\dfrac{3+\sin\frac{1}{n}}{3-\sin\frac{1}{n}}\right)$;

4. $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;

5. $\dfrac{1}{n^{1+1/n}}$;

6. $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

7. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

8. $\dfrac{(3n)!}{a^{3n}(n!)^3}$, $a>0$.

2 ★ Déterminer la nature des séries dont les termes généraux suivent :

1. $(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$; **2.** $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$; **3.** $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

3 ✎ Établir la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n+1)\frac{1}{n!}$;

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n^3+2n^2-3n-1)\frac{2^n}{n!}$;

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n^2+2n-1)\frac{1}{2^n}$;

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)3^n}$;

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{(2n)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln\frac{\cos(\mathbf{e}^{-n-1})}{\cos(\mathbf{e}^{-n})}$.

4 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Montrer que si les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, alors la série $\sum v_n$ l'est aussi.

5 ✎ Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels positifs. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente.

6 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels positifs. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$ est convergente.

7 ✎ Montrer la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

8 ★ Pour $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $\beta\in\mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ par comparaison aux séries de Riemann.

9 Discuter, en fonction de $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, la nature de la série de terme général

$$\sqrt{n}+\alpha\sqrt{n+1}+\beta\sqrt{n+2},\qquad n\in\mathbb{N},$$

et déterminer sa somme, le cas échéant.

10 ✎ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0\in\,]0,1[$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n-u_n^2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

3. Justifier que les séries $\sum \ln\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sum u_n$ divergent.

11 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction 1-périodique et continue.

1. Montrer que :

$$\int_n^{n+1}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad n\to\infty.$$

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_n^{n+1}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

12 ★ On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$$

et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

2. En déduire l'existence d'un réel γ, appelé *constante d'Euler*, tel que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1),\qquad n\to\infty.$$

13 Soient $\alpha\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}_+^*$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$x_{n+1}=x_n\left(q+\frac{\alpha}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),\qquad n\to\infty.$$

Étant donné un paramètre $\beta\in\mathbb{R}$ à ajuster, on pose $y_n=\ln\dfrac{x_n}{q^n n^\beta}$ et $u_n=y_{n+1}-y_n$ pour tout $n\geqslant 1$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

2. En déduire qu'il existe une constante $C>0$ et un réel β tels que $x_n\sim Cq^n n^\beta$.

14 ★♣ Soit $\sum u_n$ une série convergente. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{u_n}{n}$.

Indication. On pourra exprimer la n-ième somme partielle T_n de la série $\sum_k u_k/k$ en fonction de la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum_k u_k$ en écrivant, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $u_k=S_k-S_{k-1}$.

✎ : application ♣ : difficile ★ : classique

15 ♣

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $v_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la série $\sum v_n$ converge. On pose :

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_n = \sum_{k=n}^{\infty} v_k.$$

a. Montrer que si $u_n = o(v_n)$, alors $\mathrm{U}_n = o(\mathrm{V}_n)$.
b. En déduire que si $u_n \sim v_n$, alors $\mathrm{U}_n \sim \mathrm{V}_n$.

2. *Application.* On admet la formule de Stirling (cf. DL ?) :

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\frac{n^{n+1/2}}{\mathbf{e}^n}, \quad n \to \infty,$$

que l'on cherche à préciser en donnant un développement asymptotique de $n!$ à trois termes (deux termes principaux plus le reste).

a. En remarquant que

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}, \qquad n \to \infty,$$

déterminer un équivalent de $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

b. On pose :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_n = \ln\left(\frac{n!\mathbf{e}^n}{n^{n+1/2}}\right).$$

Déterminer un équivalent de $u_n = a_{n+1} - a_n$ et en déduire un développement asymptotique de a_n à la précision $o(1/n)$.

c. Conclure.

16 ★

1. En observant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t,$$

montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire la convergence et la somme de la série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

17 Soit $x \in [0, 1]$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

2. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

Que peut-on en déduire ?

18 ★ On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}.$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$ et que f y est paire.

2. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. **a.** Pour $x_0 > 0$ donné, montrer l'existence d'un réel $\kappa > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right], \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \kappa\,|x - x_0|.$$

b. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

4. **a.** Justifier que f admet des limites (finies ou infinies) en $+\infty$ et à droite en 0.
b. Déterminer ces limites à l'aide de minorations/majorations.

19 ♣

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs telle que $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que la série $\sum a_n 10^{-n}$ est convergente.

Si x désigne la somme de la série $\sum a_n 10^{-n}$, on dit que la suite (a_n) constitue *un développement décimal* du réel x et l'on note $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$.

2. Y a-t-il unicité d'un tel développement ?

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite d'entiers relatifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue *un développement décimal propre* de x si $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour tout $n \geqslant 1$ et si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leqslant x < \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un développement décimal propre d'un réel x.
a. Montrer que la série $\sum a_n 10^{-n}$ converge vers x.
b. Montrer que la suite (a_n) ne stationne pas à 9 (i.e. n'est pas identiquement égale à 9 à partir d'un certain rang).

4. Montrer que tout réel admet un unique développement décimal propre.

20 ♣ Montrer que les séries doubles ci-dessous sont absolument convergentes et en calculer la somme :

1. $\sum_{i,j\geqslant 0} \frac{i+j}{i!j!2^{i+j}}$; **2.** $\sum_{i,j\geqslant 0} \frac{(i+j)!}{i!j!} x^{i+j}$ (où $|x| < \frac{1}{2}$) ; **3.** $\sum_{i,j\geqslant 0} \frac{x^i y^j}{(i+j)!}$ (où $x, y \in \mathbb{R}$).

21 ♣ Étant donné un réel $\alpha \geqslant 0$, on considère la série double de terme général $a_{i,j} = \frac{1}{(i^2+j^2)^\alpha}$, $i, j \geqslant 1$. On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant k} a_{i,j}.$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2k+1}{2^\alpha (k+1)^{2\alpha}} \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant \frac{2k+1}{(k+1)^{2\alpha}}.$$

2. On suppose dans cette question $\alpha \leqslant 1$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$ et en déduire que la série double $\sum_{i,j} a_{i,j}$ diverge.

3. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série double $\sum_{i,j} a_{i,j}$ converge.

22 ♣ Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

La série $\sum w_n$ est appelée *produit de Cauchy* des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

1. En utilisant le théorème de sommation par paquets, montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum w_n$ converge absolument avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\Big).$$

2. On souhaite dans cette question établir le résultat de la question **1.** sans faire appel au théorème de sommation par paquets.

a. On suppose dans cette question que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} w_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n} w_k$$

et conclure dans ce cas.

b. De retour au cas général, justifier que la série $\sum w_n$ converge absolument puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Big|\sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n} w_k\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k| \sum_{k=0}^{n} |v_k| - \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} |u_i v_{k-i}|$$

et conclure.

La suite de l'exercice est consacrée à des applications du résultat précédent.

3. Sans utiliser la fonction exponentielle, montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

4. Établir par récurrence la formule du binôme négatif :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \,]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Indications

4 Utiliser le théorème de comparaison des séries à termes réels positifs.

5 Pour n assez grand, comparer u_n et u_n^2.

6 Pour établir la convergence de la série à termes réels positifs $\sum u_{2n}$, on pourra rapprocher la suite de ses sommes partielles de celle de $\sum u_n$.

7 Montrer que la suite de terme général $\ln u_n$, $n \geqslant 1$, est la suite des sommes partielles d'une série convergente.

8 Étudier la limite de $n^\gamma u_n$ lorsque $n \to \infty$ en fonction de α et γ. À quelle condition sur α existe-t-il un réel γ qui permette de conclure ?

9 Effectuer un développement asymptotique du terme général pour en déduire un équivalent. On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de α et β. En cas de convergence, la somme peut-être calculée par télescopage.

10
1. Utiliser le théorème de la limite monotone.
2. Observer que la série est télescopique.
3. Les deux séries sont de même nature, la première est télescopique.

11
1. Majorer
$$\left|\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$
en utilisant le changement de variable $t = n + u$ dans l'intégrale de gauche.
2. Justifier que la série est de même nature que la série $\sum \frac{\mathrm{K}}{n}$ où $\mathrm{K} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

12
1. Grâce à un développement limité, montrer que $v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
2. Justifier que la suite (u_n) converge.

13
1. Utiliser un développement limité de u_n.
2. Justifier qu'il existe une valeur de β qui rend la suite (u_n) convergente.

14 Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{S}_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathrm{S}_0.$$

15
1. **a.** Revenir aux ε.
   b. Appliquer le résultat de la question **a.** à $(u_n - v_n)$.
2. **a.** Appliquer le résultat de la question **1.b.** et calculer $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ par télescopage.
   b. Quelle est la limite de (a_n) ? Appliquer le résultat de la question **1.b.** à (u_n) après en avoir déterminé un équivalent grâce à un développement limité.

16
1. Écrire la somme partielle sous la forme d'une seule intégrale, sous laquelle on reconnaîtra une somme géométrique.
2. Grâce à un encadrement, déterminer la limite lorsque $n \to \infty$ de l'intégrale au membre de droite de la formule de la question **1.**.

17
2. Intégrer la relation précédente entre des bornes bien choisies puis majorer l'intégrale au membre de droite.

18
1. Déterminer les réels x pour lesquels la série $\sum \frac{1}{n(1+nx^2)}$ converge.
2. Montrer par des manipulations d'inégalités que $f(x) \geqslant f(y)$ si $x \leqslant y$.
4. **b.** Pour la limite à droite en 0, on pourra minorer $f(x)$ par une somme partielle de la série harmonique.

19
1. Montrer que la suite des sommes partielles est majorée.
2. Penser à 1...
4. Raisonner par analyse-synthèse et considérer
$$a_n = \left\lfloor 10^n\left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{10^k}\right)\right\rfloor.$$