

Travaux dirigés
 Suites et fonctions d'une variable
 ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
 Année 2019/2020

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 1 / 58

Exercice 1

Exercice 1

Traité en classe.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 2 / 58

Exercice 2

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers qui converge vers ℓ . On cherche à montrer que (u_n) est stationnaire, i.e. constante à partir d'un certain rang.

Par définition de la limite,
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$

Si $\ell \in \mathbb{Z}$, alors en prenant $\varepsilon = \frac{1}{3}$, on obtient $|u_n - \ell| \in \mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] = \{0\}$ et donc $u_n = \ell$ pour tout $n \geq N$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 3 / 58

Exercice 2

Dans le cas général, toujours pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$, on obtient pour $n \geq N$:

$$|u_n - u_N| = |(u_n - \ell) - (u_N - \ell)| \leq |u_n - \ell| + |u_N - \ell| \leq 2\varepsilon < 1$$

donc $u_n = u_N$ et la suite (u_n) est stationnaire.

On peut en fait traiter le cas général avec la première méthode car, même si ℓ n'est pas réputé entier, l'intervalle $[\ell - \frac{1}{3}, \ell + \frac{1}{3}]$, de longueur $\frac{2}{3} < 1$, ne contient au plus qu'un entier. Comme il contient tous les entiers $u_n, n \geq N$, ceux-ci sont nécessairement égaux.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 4 / 58

Exercice 3

La réciproque étant évidente, on peut donc énoncer : une suite d'entiers est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 5 / 58

Exercice 3 Q 1

Exercice 3

Question 1

On suppose dans un premier temps que $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On a alors, pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
 |v_n| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^n u_k \right| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right| + \frac{1}{n} \left| \sum_{k=N}^n u_k \right| \\
 &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right| + \frac{n - N + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right| + \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 6 / 58

Exercice 3 Q 1

Comme $K = \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right|$ est une constante (par rapport à n), le membre de droite dans l'inégalité

$$\forall n \geq N, |v_n| \leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

converge vers $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Il existe donc $N' \geq N$ tel que :

$$\forall n \geq N', |v_n| \leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Ceci établit la convergence de (v_n) vers $\ell = 0$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 7 / 58

Exercice 3 Q 1

Le cas général s'en déduit : si (u_n) converge vers ℓ , alors $(u_n - \ell)$ converge vers 0 si bien, d'après le cas précédent, que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = v_n - \ell \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

ce qui signifie que (v_n) converge vers ℓ .

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 8 / 58

Exercice 3 Q 2

Exercice 3

Question 2

On suppose que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers ℓ .
 En appliquant le théorème de Césaro à la suite de terme général $x_n = u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbb{N}$, qui converge vers ℓ par hypothèse, on obtient que la suite de terme général

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \frac{u_{n+1} - u_1}{n}$$

(somme télescopique) converge vers ℓ .
 Il en résulte que

$$\frac{u_n}{n} = \frac{(n-1)y_{n-1} + u_1}{n} = \frac{n-1}{n} y_{n-1} + \frac{u_1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 9 / 58

Exercice 3 Q 3.a

Exercice 3

Question 3.a

On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le lemme de l'escalier peut être appliqué à la suite de terme général $z_n = \ln u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, car

$$z_{n+1} - z_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \ell.$$

On en déduit que :

$$\frac{z_n}{n} = \ln u_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \ell.$$

Il en résulte par continuité de l'exponentielle que :

$$\sqrt[n]{u_n} = u_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\ln \ell} = \ell.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 10 / 58

Exercice 3 Q 3.b

Exercice 3

Question 3.b

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n}{n!}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left\{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} = \exp\left\{n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\ &= \exp(1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e. \end{aligned}$$

Il en résulte d'après a. que :

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 11 / 58

Exercice 3 Q 3.b

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n(n+1) \cdots (n+n)}{n^n}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n+2)}{n(n+1) \cdots (n+n)} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{n} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2(2n+1)}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &\sim 4 \exp\left\{-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} = 4 \exp\left\{-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\ &= 4 \exp(-1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

Il en résulte d'après a. que :

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots (n+n)} = \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{e}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 12 / 58

Exercice 4 Q 1

Exercice 4

Question 1

Tout d'abord, on justifie par récurrence que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et à termes strictement positifs.
 On utilise le prédicat de récurrence \mathcal{P}_N : les suites sont bien définies jusqu'au rang N et à termes réels strictement positifs.
 Pour étudier la monotonie des suites (a_n) et (b_n) on s'intéresse aux quantités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 13 / 58

Exercice 4 Q 1

On est donc conduit à comparer, pour $n \geq 1$, les réels

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}.$$

On retiendra l'inégalité classique (dite inégalité arithmético-géométrique) :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2},$$

que l'on peut aussi utiliser sous la forme :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad |uv| \leq \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

On en déduit que $a_n \geq b_n$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ croissante.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 14 / 58

Exercice 4 Q 1

La suite (a_n) est par ailleurs minorée par 0, comme on l'a fait remarquer dès le départ. Quant à la suite $(b_n)_{n \geq 1}$, elle est majorée par a_1 par décroissance de $(a_n)_{n \geq 1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n \leq a_n \leq a_1.$$

Dans ces conditions, les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes en vertu du théorème de la limite monotone. Soient α et β leurs limites respectives.
 En passant aux limites (qui existent) dans la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

on obtient enfin :

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

c'est-à-dire $\alpha = \beta$, d'où le résultat.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 15 / 58

Exercice 4 Q 2

Exercice 4

Question 2

Il résulte de l'étude faite en 1. que les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. Ainsi, en notant ℓ leur limite commune,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \leq \ell \leq b_n.$$

On en déduit que tout réel de l'intervalle $[a_n, b_n]$ constitue une valeur approchée de ℓ à la précision $\varepsilon > 0$ dès que $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$ (plus finement, $\frac{a_n + b_n}{2}$ conviendra dès que $|b_n - a_n| \leq 2\varepsilon$).

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 16 / 58

Exercice 4 Q 2

D'ou le script Scilab ci-dessous :

```
// saisie des paramètres
a=input('Paramètre a : ')
b=input('Paramètre b : ')
n=input('Nombre de décimales : ')
// calcul des premiers termes de la suite
while (abs(b-a)>2*10^(-n))
    t=a
    a=(a+b)/2
    b=sqrt(t*b)
end
// affichage du résultat
disp((a+b)/2, 'Valeur approchée de la moyenne
arithmético-géométrique : ')
```

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 17 / 58

Exercice 5

Étant donnés deux réels $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ fixés, il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premiers termes u_0 et u_1 satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (une récurrence immédiate montre que u_n est bien défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$). Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = \ln u_n$, $n \in \mathbb{N}$ (bien définie d'après la remarque précédente). La relation de récurrence sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induit sur $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la relation de récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2v_{n+2} - v_{n+1} - v_n = 0.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 18 / 58

Exercice 5

Puisque le polynôme caractéristique $2X^2 - X - 1$ admet les deux racines simples 1 et $-\frac{1}{2}$, il existe donc deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Le système linéaire de Cramer

$$\begin{cases} \alpha + \beta = v_0 \\ \alpha - \beta/2 = v_1 \end{cases}$$

se résout en

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(v_0 + 2v_1) \\ \beta = \frac{2}{3}(2v_0 - 2v_1) \end{cases},$$

ce qui conduit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \exp v_n = \sqrt[3]{u_0 u_1^2} \exp \left\{ \frac{2}{3} \left(\ln \frac{u_0}{u_1} \right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}.$$

On en déduit en particulier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt[3]{u_0 u_1^2}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 19 / 58

Exercice 8

Question 1

Pour $n \geq 1$ donné, la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Elle réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)] = [0, 2]$. Il existe donc un unique réel $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 1$, c'est-à-dire $x_n^n + x_n = 1$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 20 / 58

Exercice 8

Question 2

Puisque $0 \leq x_n \leq 1$, on a $x_n^{n+1} \leq x_n^n$ d'où $x_n^{n+1} + x_n \leq x_n^n + x_n$, c'est-à-dire $f_{n+1}(x_n) \leq 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Compte-tenu de la stricte croissance de f_{n+1} sur $[0, 1]$, on en déduit que $x_n \leq x_{n+1}$ et la suite (x_n) est donc croissante.

Étant par ailleurs majorée par 1, cette suite est donc convergente ; soit $\ell \in [0, 1]$ sa limite.

Si $\ell < 1$ alors, par croissance de (x_n) , on a $0 \leq x_n \leq \ell$ donc $0 \leq x_n^n \leq \ell^n$ pour tout $n \geq 1$ si bien que (x_n^n) converge vers 0 et

$$x_n = 1 - x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq \ell,$$

ce qui est absurde.

Par conséquent, (x_n) converge vers $\ell = 1$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 21 / 58

Exercice 8

Question 3.a

Comme (x_n) converge vers 1,

$$\ln y_n = \ln(1 - x_n) = \ln x_n^n = n \ln x_n \sim n(x_n - 1) = -ny_n.$$

Cet équivalent peut être composé par \ln car $-\ln y_n \rightarrow +\infty \neq 1$, si bien que :

$$\ln n + \ln y_n \sim \ln |\ln y_n| = o(\ln y_n)$$

d'où il découle que :

$$\ln y_n = -\ln n + o(\ln y_n)$$

i.e.

$$\ln y_n \sim -\ln n.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 22 / 58

Exercice 8

Question 3.b

Des deux équivalents de $\ln y_n$ obtenus en a., on déduit que

$$y_n \sim \frac{\ln n}{n},$$

d'où l'on tire :

$$x_n = 1 - y_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 23 / 58

Exercice 9

Question 1

Pour $n \geq 2$ donné, la fonction $f_n : x \mapsto x + x^2 + \dots + x^n$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Elle réalise donc une bijection de $]0, 1[$ sur $]f_n(0), f_n(1)[=]0, n[$. Il existe donc un unique réel $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 1$, c'est-à-dire

$$x_n + x_n^2 + \dots + x_n^n = 1.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 24 / 58

Exercice 9 Q 2

Exercice 9

Question 2

Pour $n \geq 2$, on a :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n + x_n^2 + \dots + x_n^n + x_n^{n+1} = f_n(x_n) + x_n^{n+1}$$

$$= 1 + x_n^{n+1} \geq 1 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]0, 1[$, on en déduit que $x_n \geq x_{n+1}$.
La suite (x_n) est ainsi décroissante. Étant par ailleurs minorée par 0, elle est convergente.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 25 / 58

Exercice 9 Q 3

Exercice 9

Question 3

Soit $n \geq 2$. Par construction,

$$1 = \sum_{k=1}^n x_n^k = x_n \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n}$$

d'où

$$1 - x_n = x_n - x_n^{n+1}.$$

Finalement,

$$x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\ell - 1.$$

Mais par ailleurs, la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante d'où :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq x_n^{n+1} \leq x_2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

puisque $0 \leq x_n \leq x_2 < 1$. On en déduit que (x_n^{n+1}) converge vers 0 et, par unicité de la limite, que $2\ell - 1 = 0$, c'est-à-dire $\ell = \frac{1}{2}$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 26 / 58

Exercice 9 Q 4

Exercice 9

Question 4

Puisque $2x_n \rightarrow 1$,

$$(n+1) \ln(2x_n) \sim n(2x_n - 1) = nx_n^{n+1} = o(n x_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par suite,

$$(2x_n)^{n+1} = e^{(n+1) \ln(2x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

d'où

$$x_n^{n+1} \sim \frac{1}{2^{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$x_n^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Finalement,

$$x_n = \frac{1}{2}(1 + x_n^{n+1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 27 / 58

Exercice 10

Exercice 10

Les suites de termes généraux $x_n = 2n\pi$ et $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, tend vers $+\infty$ et pourtant

$$\sin x_n = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\sin y_n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

ont des limites distinctes. Cela exclut l'existence d'une limite pour la fonction \sin en $+\infty$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 28 / 58

Exercice 12 Q 1

Exercice 12

Question 1

Par hypothèse, la fonction $g - f$ ne s'annule pas. Celle-ci étant continue sur l'intervalle $[0, 1]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure donc qu'elle garde un signe constant.
Quitte à permuter f et g , on peut donc supposer que $g(x) - f(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Par ailleurs, la fonction $g - f$ étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est minorée et atteint son minimum : il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) - f(x) \geq \varepsilon$$

où $\varepsilon = g(x_0) - f(x_0) > 0$ d'après ce qui précède.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 29 / 58

Exercice 12 Q 2

Exercice 12

Question 2

On procède par récurrence sur $n \geq 1$ avec le prédicat :

$$\mathcal{P}_n : \quad \forall x \in [0, 1], \quad g^n(x) \geq f^n(x) + n\varepsilon.$$

La propriété \mathcal{P}_1 est vraie d'après 1..
On suppose à présent la propriété \mathcal{P}_n acquise pour un entier $n \geq 1$. On écrit alors, pour $x \in [0, 1]$, en commutant f et g :

$$g^{n+1}(x) = g(g^n(x)) \geq f(g^n(x)) + \varepsilon = g^n(f(x)) + \varepsilon$$

$$\geq f^n(f(x)) + n\varepsilon + \varepsilon = f^{n+1}(x) + (n+1)\varepsilon$$

où la première inégalité résulte de \mathcal{P}_1 (appliquée à $g^n(x)$) et la seconde de \mathcal{P}_n (appliquée à $f(x)$). Ainsi la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vérifiée.
D'après le principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est donc vraie pour tout $n \geq 1$, d'où le résultat.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 30 / 58

Exercice 12 Q 3

Exercice 12

Question 3

Puisque f et g sont à valeurs dans $[0, 1]$, on déduit de l'inégalité obtenue en 2. que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \geq g^n(x) \geq f^n(x) + n\varepsilon,$$

ce qui est bien sûr absurde ! D'où le résultat.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 31 / 58

Exercice 13

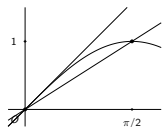
Exercice 13

On peut bien sûr faire l'étude de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\pi}{2} \sin x - x$: elle est croissante puis décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc prend des valeurs supérieures ou égales à $\varphi(0) = \varphi(\pi/2) = 0$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2019/2020 32 / 58

Mais il est plus élégant de faire appel à des arguments de convexité. Puisque $\sin'' = -\sin$ est négatif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction \sin est concave sur cet intervalle. Sa courbe représentative se situe donc « au-dessus de ses cordes » et « en-dessous de ses tangentes ». En travaillant sur la tangente à l'origine et sur la corde reliant les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$, on obtient l'inégalité classique :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$



Exercice 14

Question 1

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par opérations sur les fonctions dérivables.

Puisque

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \sim \frac{x-1}{x-1} \sim 1, \quad x \rightarrow 1,$$

elle admet pour limite 1 au point 1. On peut donc la prolonger par continuité au point 1 en posant $f(1) = 1$.

Exercice 14

Question 2.a

Pour étudier $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 1$, on pose $y = x - 1$, qui tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 1$. On obtient le développement limité suivant :

$$f(x) = \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{y - y^2/2 + o(y^2)}{y} = 1 - \frac{y}{2} + o(y) = 1 - \frac{x-1}{2} + o(x-1)$$

lorsque $x \rightarrow 1$, $x \neq 1$. Puisque $f(1) = 1$ d'après 1., ce développement est encore valable lorsque $x \rightarrow 1$ (sans la restriction $x \neq 1$).

La fonction f , qui admet ainsi un développement limité du premier ordre au voisinage de 1, est donc dérivable en ce point avec $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 14

Question 2.b

En posant $y = x - 1$, qui tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 1$, il vient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2} = \frac{y-(1+y)\ln(1+y)}{y^2(1+y)} \\ &= \frac{y-(1+y)(y-y^2/2+o(y^2))}{y^2(1+y)} \\ &= \frac{-y^2/2+o(y^2)}{y^2+o(y^2)} \sim -\frac{y^2/2}{y^2} \rightarrow -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction f étant continue en 1 d'après 1. donc sur $[1, x]$, et dérivable sur $]1, x[$, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $c_x \in]1, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c_x).$$

On justifie par encadrement que le réel c_x converge vers 1 lorsque $x \rightarrow 1$ si bien que, par composition des limites, le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque $x \rightarrow 1$. Ceci assure la dérivabilité de f en 1 avec $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 15

Il s'agit de montrer que $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$.

On raisonne par l'absurde : s'il existait $x_0 \geq 0$ tel que $f'(x_0) > 0$ alors, par croissance de f' , on aurait

$$\forall x \geq x_0, \quad f'(x) \geq f'(x_0) = m > 0.$$

Mais alors :

$$\begin{aligned} \forall x \geq x_0, \quad f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \\ &\geq f(x_0) + \int_{x_0}^x m dt \\ &= f(x_0) + m(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

en contradiction avec le caractère majoré de f .

La fonction f est donc décroissante.

Exercice 16

Question 1

On note D l'opérateur de dérivation des polynômes.

Le polynôme $U_n = (X^2 - 1)^n$ étant de degré $2n \geq n$, son polynôme dérivé n -ième est de degré $2n - n = n$ et il en va de même de P_n .

Puisque le polynôme dérivé d'un polynôme pair (resp. impair) est impair (resp. pair) et que $(X^2 - 1)^n$ est pair, le polynôme P_n est pair si n est pair et impair si n est impair. Bref, il a la même parité que n .

Exercice 16

Question 2

La formule de Leibniz donne :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2^n n!} D((X-1)^n (X+1)^n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k((X-1)^n) D^{n-k}((X+1)^n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (X-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (X+1)^k \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k. \end{aligned}$$

Dans cette formule, tous les termes de la somme s'annulent en 1 à l'exception de celui d'indice $k = n$, si bien que $P_n(1) = 1$. Par parité/imparité de P_n , on en déduit que $P_n(-1) = (-1)^n$.

Exercice 16

Question 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, il suffit de démontrer par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ la propriété \mathcal{P}_k : « le polynôme $Q_k = D^k((X^2 - 1)^n)$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1, 1[$ ».

La propriété est triviale pour $k = 0$. Si elle est acquise à un rang $k < n$, alors le polynôme Q_k admet au moins k racines $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ dans l'intervalle $]-1, 1[$. Il admet également $x_0 = -1$ et $x_{k+1} = 1$ pour racines puisque -1 et 1 sont racines de $(X^2 - 1)^n$ de multiplicité $n > k$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à Q_k sur chacun des $k + 1$ intervalles $]x_j, x_{j+1}[$, $0 \leq j \leq k$; en effet, Q_k (ou plus exactement la fonction polynomiale associée) est continue sur $]x_j, x_{j+1}[$, dérivable sur $]x_j, x_{j+1}[$ et l'on a $Q_k(x_j) = Q_k(x_{j+1}) = 0$ par hypothèse. Dans ces conditions, le polynôme Q'_k s'annule en un point de l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$. On a ainsi construit $k + 1$ racines pour le polynôme $Q'_k = Q_{k+1}$, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$, ce qui constitue le résultat au rang $k + 1$ et achève la démonstration.

Exercice 17

Question 1

On a $l_0 = \pi/2$, $l_1 = 1$ et

$$l_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2t)}{2} \, dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

De plus, le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$l_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \int_{\pi/2}^0 \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - u \right) (-du) = \int_0^{\pi/2} \cos^n u \, du.$$

Exercice 17

Question 2

Pour $n \geq 2$, on intègre par parties en primitivant \sin et en dérivant \sin^{n-1} :

$$\begin{aligned} l_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \sin t \, dt = - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \, d(\cos t) \\ &= - \left[\sin^{n-1} t \cos t \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t \, d(\sin^{n-1} t) \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^{n-2} t \, dt \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t \, dt = (n-1)(l_{n-2} - l_n). \end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2, \quad l_n = \frac{n-1}{n} l_{n-2}.$$

Exercice 17

Question 3

On a pour $n \in \mathbb{N}$ donné et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t \leq 1$ d'où l'on tire $0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. Par croissance de l'intégrale sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que $0 \leq l_{n+1} \leq l_n$, ce qui établit la décroissance de la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a mieux que $l_n \geq 0$: puisque la fonction \sin^n est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, son intégrale l_n sur ce segment est non nulle ; on a donc $l_n > 0$.

La décroissance de la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la relation de récurrence établie à la question 2. donnent alors :

$$\forall n \geq 2, \quad 1 \leq \frac{l_{n-1}}{l_n} \leq \frac{l_{n-2}}{l_n} = \frac{n}{n-1}.$$

Le théorème des gendarmes s'applique et fournit la convergence de l_{n-1}/l_n vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui signifie que $l_n \sim l_{n-1}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 17

Question 4

La relation de récurrence établie à la question 2. fournit :

$$\forall n \geq 2, \quad n l_n l_{n-1} = (n-1) l_{n-1} l_{n-2},$$

de sorte que la suite $(n l_n l_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante, égale à son terme initial :

$$\forall n \geq 1, \quad n l_n l_{n-1} = l_1 l_0 = \frac{\pi}{2}.$$

D'après la question 3., on a donc :

$$l_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} l_n l_{n-1} = \frac{\pi}{2n},$$

et finalement (puisque $l_n \geq 0$) :

$$l_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 17

Question 5

La relation de récurrence établie à la question 2. donne $l_{2k} = (2k-1)/(2k) \cdot l_{2k-2}$ pour tout $k \geq 1$, de sorte qu'on est tenté d'écrire, pour $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} l_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} l_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} l_{2p-4} = \dots \\ &= \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} l_0 = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \pi. \end{aligned}$$

Pour rédiger rigoureusement ce raisonnement, on peut démontrer par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad l_{2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \frac{\pi}{2}.$$

(en convenant que $0!! = (-1)!! = 1$).

- Initialisation : on a bien $l_0 = \pi/2$ d'après la question 1..
- Hérédité : si la formule est acquise à un rang $p \in \mathbb{N}$, alors d'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} l_{2(p+1)} &= l_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} l_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+1)!!}{(2p+2)!!} \frac{\pi}{2} = \frac{(2(p+1)-1)!!}{(2(p+1))!!} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La formule est ainsi démontrée pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On peut aussi démontrer le résultat en utilisant un produit télescopique :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = I_0 \prod_{k=1}^p \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \frac{\pi}{2}.$$

À partir de $I_1 = 1$ et $I_{2k+1} = (2k)/(2k+1) \cdot I_{2k-1}$ pour tout $k \geq 1$, il vient de même :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = I_1 \prod_{k=1}^p \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} = \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1} = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}.$$

De la question 3., on tire que I_{2p+1}/I_{2p} tend vers 1 lorsque $p \rightarrow \infty$. Comme d'après les formules précédentes,

$$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{((2p)!!)^2}{((2p-1)!!)^2(2p+1)} \frac{2}{\pi},$$

on obtient la formule de Wallis :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(2p)!!}{(2p-1)!! \sqrt{2p+1}}.$$

Pour finir, en remarquant que $(2p)!! = 2^p p!$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut simplifier les formules précédentes :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{((2p)!!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = \frac{((2p)!!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice 18

Question 1

La fonction f , continue sur \mathbb{R} , y admet des primitives. Soit F l'une d'entre elles. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = 0$$

car l'intégrale d'une fonction T -périodique sur un segment de longueur T ne dépend pas du choix de ce segment.

Ainsi les primitives de f sont T -périodiques.

Exercice 18

Question 2

Étant donné $\lambda > 0$, le changement de variable $u = \lambda t$ donne :

$$\int_a^b f(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(u) du = \frac{F(\lambda b) - F(\lambda a)}{\lambda}.$$

Or F , continue sur le segment $[0, T]$, y est bornée. Étant par ailleurs T -périodique d'après 1., cette fonction est bornée sur \mathbb{R} : il existe $M \geq 0$ tel que $|F(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dès lors,

$$\forall \lambda > 0, \quad \left| \int_a^b f(\lambda t) dt \right| \leq \frac{|F(\lambda b)| + |F(\lambda a)|}{\lambda} \leq \frac{2M}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit par encadrement que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(\lambda t) dt = 0.$$

Exercice 19

Question 1

D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction exponentielle, de classe \mathcal{C}^{n+1} , sur l'intervalle $[0, 1]$, on a :

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} I_n.$$

Par suite,

$$I_n = n! \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = n! \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^n n(n-1) \cdots (k+1)$$

est un entier pour $n \geq q$.

Exercice 19

Question 2

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e dt = \frac{e}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit par encadrement que (I_n) converge vers 0.

Exercice 19

Question 3

D'après les questions 1. et 2., on doit avoir $I_n \in \mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, c'est-à-dire $I_n = 0$ pour n assez grand.

Or ceci est absurde car la fonction $t \mapsto (1-t)^n e^t$ est continue, positive mais non identiquement nulle sur le segment $[0, 1]$.

C'est donc que l'hypothèse initiale est fautive : e est irrationnel.

Exercice 20

Pour $x \in \mathbb{R}$ donné et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in [0, x], \quad \left| \exp^{(n+1)} t \right| = e^t \leq e^{|x|}$$

(inégalité valable pour x positif ou négatif) si bien que, par application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction \exp sur l'intervalle $[0, x]$ à l'ordre n ,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit la convergence et la somme ci-dessous :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exercice 21

La formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre 2 en a à la fonction f , de classe \mathcal{C}^2 , s'écrit :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2), \quad x \rightarrow a.$$

En l'appliquant à $x = a + h$ puis $x = a - h$, qui tendent vers a lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2), \quad h \rightarrow 0$$

ainsi que :

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

Par suite :

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f''(a).$$