

Informatique

TP 1

Révisions

Sur son lecteur personnel $K:\backslash$, créer un dossier Scilab puis un sous-dossier TP1 (on ajoutera un nouveau sous-dossier TP à chaque nouveau TP). Dans le menu Fichier de la console, cliquer sur « Changer le répertoire courant... » et choisir le répertoire $K:\backslash\text{Scilab}\backslash\text{TP1}\backslash$.

Les scripts doivent être implémentés dans SciNotes (que l'on peut ouvrir depuis la console grâce au menu Applications/SciNotes, grâce à une icône de la barre d'outils ou par l'instruction `scinotes`) et enregistré dans le répertoire courant sous la forme d'un fichier `ex0.sce` où 0 est le numéro de l'exercice (voire `ex0.0.sce` si l'on veut préciser en plus le numéro de la question). L'application SciNotes peut être intégrée à la console par glisser-déposer du bandeau grisé horizontal « SciNotes ».

En cas de besoin, on n'hésitera pas à consulter l'aide de Scilab qui indique la syntaxe précise de chaque instruction, accompagnée de nombreux exemples.

PARTIE 1 : UN PEU DE PROGRAMMATION

Les boucles peuvent être utilisées lorsqu'on veut faire exécuter à l'ordinateur une tâche répétitive. On distinguera les deux types de boucles ci-dessous :

- Les boucles `for`, à utiliser lorsqu'on sait à l'avance combien de fois l'action répétitive doit être exécutée. La syntaxe est la suivante :

```
for x=1:n
    // instructions à répéter
end
```

On rappelle que l'instruction `1:n` crée un vecteur contenant les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Lors de l'exécution de la boucle, la variable `x` prend successivement les valeurs contenues dans le vecteur `1:n` (ou plus généralement dans un vecteur donné) et, pour chacune d'elle, exécute les instructions à répéter. Lorsque les éléments du vecteurs `1:n` sont épuisés, on sort de la boucle et on continue l'exécution du programme.

- Les boucles `while`, à utiliser lorsqu'on ne sait pas à l'avance combien de fois l'action à répéter doit être exécutée : on l'exécute jusqu'à ce qu'une condition de sortie soit satisfaite. La syntaxe est la suivante :

```
while (condition)
    // instructions à répéter
end
```

où `condition` est un expression vraie ou fausse (un booléen). Lors de l'exécution de la boucle, on exécute les instructions à répéter *tant que* `condition` est vraie (`condition` est donc une condition de continuation, et non de sortie); plus précisément, les instructions sont exécutées après avoir vérifié si `condition` est vraie. Bien entendu, `condition` doit faire intervenir des variables qui seront modifiées par les instructions à répéter de façon à ce que `condition` soit fausse après un nombre fini d'exécutions des instructions à répéter.

À toutes fins utiles, on rappelle également la syntaxe de l'alternative :

```
if (condition) then
    // instructions à exécuter si condition est vraie
[else
    // instructions à exécuter si condition est fausse]
end
```

On rappelle les instructions d'entrée/sortie que l'on peut utiliser dans un script :

- `disp(message)` a pour effet d'afficher à l'écran la chaîne de caractères ou la valeur `message` ;
- `var=input(message)` a pour effet d'afficher la chaîne de caractères `message` (à entourer de `'`), d'attendre que l'utilisateur entre au clavier une valeur puis d'affecter cette valeur à la variable `var`.

Exercice 1

1. On considère le code ci-dessous :

Listing 1 : code à analyser

```
n=15;
a=1:n;
b=1 ./a;
disp(sum(b));
```

Que fait ce script ? Expliquer l'effet de chaque instruction. Quel est le rôle du `.` devant le `/` en ligne 3 ?

2. Écrire un autre script effectuant le même calcul grâce à une boucle.

Exercice 2

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = a$ et $b_0 = b$ ainsi que les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

convergent vers la même limite. Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique des réels strictement positifs a et b .

2. Écrire un script demandant à l'utilisateur d'entrer les valeurs de a , b et n puis calculant et affichant une valeur approchée à la précision 10^{-n} (cf. annexe) de la moyenne arithmético-géométrique de a et b .

Une fonction est une nouvelle instruction créée par l'utilisateur. Elle prend des arguments et renvoie un résultat. La syntaxe de base est la suivante :

```
function y=f(x)
    // instructions à exécuter pour calculer le résultat à renvoyer
    y= // résultat à renvoyer
endfunction
```

On définit ainsi une fonction appelée f (le nom peut bien sûr être modifié). La variable y (qui apparaît deux fois dans le code précédent) est muette, elle ne sert qu'à indiquer à la fin du code de la fonction le résultat à renvoyer. De même que x qui désigne un élément générique auquel on peut appliquer la fonction. Une fois une telle fonction déclarée dans un script (enregistré et exécuté !), l'exécution dans la console de l'instruction $f(1)$ aura pour effet de calculer $f(1)$, c'est-à-dire d'exécuter les instructions figurant dans le code de la fonction en remplaçant x par la valeur 1.

On peut plus généralement définir des fonctions $[y_1, \dots, y_p] = f(x_1, \dots, x_n)$ prenant éventuellement plusieurs arguments et renvoyant éventuellement plusieurs résultats.

Exercice 3

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

1. Écrire une fonction Scilab `STexp(n, x)` renvoyant la valeur de $P_n(x)$, calculée grâce à une boucle. On pourra remarquer pour accélérer les calculs que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{x}{k+1} \frac{x^k}{k!}.$$

2. Calculer $P_n(x)$ pour différentes valeurs de n et de x puis comparer à e^x .
3. Écrire une autre fonction réalisant le même calcul qu'en 1. mais au moyen d'opérations sur des matrices (comme dans le listing 1). On pourra utiliser l'instruction `cumprod` (l'aide de Scilab est votre amie...).

PARTIE 2 : UTILISATION DES INSTRUCTIONS GRAPHIQUES DE SCILAB

On rappelle qu'étant donnés deux vecteurs x et y de même taille, l'instruction `plot2d(x, y)` a pour effet de relier les points de coordonnées (x_i, y_i) . Si x est une subdivision assez fine d'un segment $[a, b]$ et y contient les images par une fonction f des éléments de x , alors le tracé est la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

Deux commandes sont utiles pour créer une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ (faites des tests !) :

- `a:h:b` a pour effet de créer un vecteur contenant les termes inférieurs à b d'une progression arithmétique de premier terme a et de pas h .
- `linspace(a, b, n)` a pour effet de créer un vecteur contenant une subdivision régulière du segment $[a, b]$ formée de n points.

Plus généralement, si x est un vecteur de taille n et Y une matrice à n lignes et p colonnes y_1, \dots, y_p , l'instruction `plot2d(x, Y)` a pour effet de superposer sur un même graphe les représentations graphiques de y_1, \dots, y_p en fonction de x .

On pourra consulter l'aide de Scilab pour obtenir davantage de détails sur l'instruction `plot2d`. La fenêtre graphique peut être nettoyée en utilisant l'instruction `clf`.

Exercice 4

1. Superposer sur une même figure les représentations graphiques des fonctions $\sin, x \mapsto x, x \mapsto x - \frac{x^3}{3!}$ et $x \mapsto x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. Modifier le graphique précédent pour que les axes se croisent à l'origine et les ordonnées varient de -1 à 1 .

Exercice 5

On admet que la fonction

$$\text{sh} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

est bijective de \mathbb{R} sur lui-même. Représenter graphiquement la fonction `sh` ainsi que sa réciproque (que l'on ne cherchera pas à calculer) sur l'intervalle $[-3, 3]$.

Annexe : une remarque sur les valeurs approchées à la précision 10^{-n}

Soit x un nombre réel dont on cherche une valeur approchée à la précision $\varepsilon = 10^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ donné). D'un point de vue mathématique, il s'agit des réels y tels que $|y - x| \leq \varepsilon$. Numériquement, par souci de cohérence, on recherchera une valeur approchée \bar{x} sous la forme d'un nombre décimal à n décimales ; il y a toujours existence mais en général pas unicité d'une telle valeur approchée numérique (approximation par défaut ou par excès).

Selon le contexte, c'est un algorithme plus ou moins compliqué qui permettra dans un premier temps d'obtenir une valeur approchée \bar{x} de x au sens mathématique, i.e. telle que $|x - \bar{x}| \leq \varepsilon$. Pour que les erreurs d'arrondi ne se répercutent pas sur l'approximation \bar{x} recherchée, il convient de mener le calcul de \bar{x} avec « suffisamment » de décimales supplémentaires (« suffisamment » étant le couvercle d'une boîte de Pandore, qui restera fermée, du moins dans ces notes).

À ce stade, comment déduire \bar{x} de $\bar{\bar{x}}$? On peut imaginer plusieurs possibilités : prendre le nombre décimal à n décimales immédiatement inférieur à $\bar{\bar{x}}$ (approximation par défaut), ou immédiatement supérieur (approximation par excès) ou encore prendre parmi ces deux décimaux celui qui est le plus proche de $\bar{\bar{x}}$ (en décidant du cas médian)... Aucune de ces solutions n'est satisfaisante, comme le montrent les contre-exemples suivants pour $n = 2$:

$x = 3,274$	$x = 3,274$	$x = 3,274$
$\bar{\bar{x}} = 3,2671$	$\bar{\bar{x}} = 3,281$	$\bar{\bar{x}} = 3,2649$
$\bar{x} = 3,26$	$\bar{x} = 3,29$	$\bar{x} = 3,26$
L'approximation par défaut ne convient pas	L'approximation par excès ne convient pas	L'approximation au plus proche ne convient pas

La raison en est simple : ne sachant pas si $\bar{\bar{x}}$ est une valeur approchée par défaut ou par excès de x à la précision ε , on ne sait pas si l'on doit approcher $\bar{\bar{x}}$ par excès ou par défaut (pour compenser !), si bien que les erreurs d'approximation s'ajoutent d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\bar{x} - x| \leq |\bar{\bar{x}} - x| + |\bar{\bar{x}} - \bar{x}| \leq 2\varepsilon \dots$$

Après cette analyse, il est facile de contourner le problème : il suffit d'obtenir en premier lieu par un algorithme une valeur approchée $\bar{\bar{x}}$ de x à la précision $\varepsilon/2 = 5 \cdot 10^{-(n+1)}$ puis de considérer un nombre décimal \bar{x} à n décimales approchant $\bar{\bar{x}}$ (au sens large) à la précision $\varepsilon/2 = 5 \cdot 10^{-(n+1)}$. Pour cette dernière étape, il suffit d'approcher $\bar{\bar{x}}$ par défaut si la $n + 1$ -ième décimale d_{n+1} vérifie $0 \leq d_{n+1} \leq 4$ et par excès si $5 \leq d_{n+1} \leq 9$.

Pour terminer par un exemple, on considère le calcul d'une valeur approchée de la moyenne arithmético-géométrique m des réels 1 et 2 à la précision $\varepsilon = 10^{-3}$. Le script de la question 2. de l'exercice 2 fournit $\bar{\bar{m}} = 1,456791$ à $5 \cdot 10^{-4}$ près, que l'on approche à son tour à $5 \cdot 10^{-4}$ près pour obtenir une valeur approchée de m à 10^{-3} près : $\bar{m} = 1,457$.