Devoir libre 11 (facultatif)

À rendre lundi 27 janvier 2020

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles. L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbb{E}(\mathrm{X})$. Si A est un événement de probabilité non nulle, on note $\mathbb{P}(\mathrm{E}\,|\,\mathrm{A})$ la probabilité conditionnelle sachant A de l'événement E.
Si n est un entier naturel non nul et si $x_1, \ldots, x_n$ sont n réels, on note $\min(x_1, \ldots, x_n)$ ou $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ le plus petit d'entre eux.
On rappelle que deux variables aléatoires X et Y prenant des valeurs *positives ou nulles* sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}\big([\mathrm{X} \leqslant a] \cap [\mathrm{Y} \leqslant b]\big) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant a)\,\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant b).$$

On rappelle qu'une variable aléatoire X prenant des valeurs positives ou nulles suit une loi exponentielle si, et seulement si, elle vérifie la propriété, dite d'absence de mémoire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} > x+y \,|\, \mathrm{X} > x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} > y).$$

On rappelle enfin l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, valable pour une variable aléatoire réelle X admettant une variance :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\big(|\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\varepsilon^2}.$$

L'objet du problème est l'obtention de diverses caractérisations de la loi exponentielle.

Première partie
Un résultat d'analyse

On considère une fonction réelle φ continue sur $[0,1]$. On note M le maximum de la fonction $|\varphi|$ sur $[0,1]$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $v \in [0,1]$, on note $\mathrm{Y}_{n,v}$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et v.

1. Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un réel $x \in \,]0,1[$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que $0 < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < 1$.

a. Comparer, pour tout réel $v \in [x+\varepsilon, 1]$, les événements $[\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx]$ et $\big[|\mathrm{Y}_{n,v} - nv| \geqslant n(v-x)\big]$ et en déduire les inégalités :

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx) \leqslant \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

b. Justifier d'une manière analogue :

$$\forall v \in [0, x-\varepsilon], \quad \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n,v} > nx) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

c. Établir les inégalités :

$$\left|\int_{x+\varepsilon}^{1} \varphi(v)\,\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx)\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}(1-x)}{4n\varepsilon^2}$$

et

$$\left|\int_{0}^{x-\varepsilon} \varphi(v)\big(1 - \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx)\big)\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}x}{4n\varepsilon^2}.$$

d. En déduire l'inégalité :

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\,\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx)\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \Big(\frac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon\Big)\mathrm{M}.$$

2. Établir que, pour tout réel $x \in \,]0,1[$ on a, pour tout entier naturel n assez grand, l'inégalité :

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\,\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx)\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{9\mathrm{M}}{4\sqrt[3]{n}}.$$

3. On suppose maintenant que la fonction φ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \varphi(v) v^n \, \mathrm{d}v = 0.$$

a. Justifier que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad \int_0^1 \varphi(v) \mathrm{P}(v) \, \mathrm{d}v = 0.$$

b. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x \in \left]0, 1\right[, \quad \int_0^x \varphi(v) \, \mathrm{d}v = 0.$$

c. Montrer que la fonction φ est identiquement nulle.

On a ainsi montré dans cette partie que si φ est une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $\int_0^1 \varphi(v) v^n \, \mathrm{d}v = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors φ est nulle.

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *indépendantes, positives ou nulles*, admettant toutes la même densité (nulle sur $]-\infty, 0[$) dont on note f la restriction à l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose que la fonction f est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. On note F la restriction à l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction de répartition commune à toutes ces variables. On suppose de plus que X_1 (et donc chaque variable X_n) admet une espérance.

Deuxième partie

Caractérisations de la loi exponentielle à l'aide du minimum d'un n-échantillon

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n l'application définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathrm{I}_n(\omega) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{X}_i(\omega)$$

et on admet que I_n est une variable aléatoire.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la fonction de répartition de I_n en fonction de F.

2. Justifier que I_n admet une espérance.

3. Dans cette question, on suppose que la loi de X_1 (qui est la loi commune à tous les X_n) est exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable $n\mathrm{I}_n$ a même loi que X_1.

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de I_n.

L'objet des questions suivantes est d'établir que chacune des deux propriétés précédentes est caractéristique de la loi exponentielle.

4. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable $n\mathrm{I}_n$ a même loi que X_1.

a. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{F}(x) = 1 - \left(1 - \mathrm{F}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.$$

b. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n \to \infty} n \ln\left(1 - \mathrm{F}\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

c. Montrer que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre $\mathrm{F}'(0)$.

5. On revient au cas général.

a. Montrer que la fonction F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. On note F^{-1} sa réciproque.

b. À l'aide d'un changement de variable, établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(\mathrm{I}_n) = n \int_0^1 \mathrm{F}^{-1}(u)(1-u)^{n-1} \, \mathrm{d}u.$$

c. Établir :

$$\forall u \in [0, 1[, \quad 0 \leqslant (1-u)\mathrm{F}^{-1}(u) \leqslant \int_u^1 \mathrm{F}^{-1}(t) \, \mathrm{d}t.$$

En déduire que la fonction G définie sur $[0,1]$ par

$$\forall u \in [0,1], \quad \mathrm{G}(u) = \begin{cases} (1-u)\mathrm{F}^{-1}(u) & \text{si } u \in [0,1[\\ 0 & \text{si } u = 1 \end{cases}$$

est continue. Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$, les relations :

$$\mathbb{E}(\mathrm{I}_n) = n\int_0^1 \mathrm{G}(u)(1-u)^{n-2}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{I}_n) = n\int_0^1 \mathrm{G}(1-v)v^{n-2}\,\mathrm{d}v.$$

d. On suppose maintenant qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(\mathrm{I}_n) = \frac{1}{n\lambda}$.
On note F_λ la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ et G_λ la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall u \in [0,1], \quad \mathrm{G}_\lambda(u) = \begin{cases} (1-u)\mathrm{F}_\lambda^{-1}(u) & \text{si } u \in [0,1[\\ 0 & \text{si } u = 1 \end{cases}.$$

(i) Quelle est, pour tout entier $n \geqslant 2$, la valeur de $n\int_0^1 \mathrm{G}_\lambda(1-v)v^{n-2}\,\mathrm{d}v$?
(ii) À l'aide du résultat de la première partie, montrer que G et G_λ sont égales.
(iii) En déduire que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre λ.

Troisième partie

Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide des deux premiers records

On pose $\mathrm{R}_1 = \mathrm{X}_1$ et l'on définit l'application R_2 sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathrm{R}_2(\omega) = \begin{cases} \mathrm{X}_n(\omega) & \text{si } n \text{ est le plus petit des entiers } k \geqslant 1 \text{ tels que } \mathrm{X}_k(\omega) > \mathrm{X}_1(\omega) \\ \mathrm{X}_1(\omega) & \text{si un tel entier } k \text{ n'existe pas} \end{cases}.$$

On admet que R_2 est une variable aléatoire.

Préliminaire

1. Exprimer l'événement $[\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_1]$ à l'aide de la suite d'événements $\big([\mathrm{X}_k \leqslant \mathrm{X}_1]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

2. Établir :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=2}^{n+1}[\mathrm{X}_k \leqslant \mathrm{X}_1]\Big) \leqslant \mathrm{F}(t)^{n+1} + 1 - \mathrm{F}(t).$$

3. Soit un réel $\varepsilon > 0$. En choisissant un réel t de façon convenable et à l'aide de l'inégalité précédente, montrer que pour tout entier n assez grand,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=2}^{n+1}[\mathrm{X}_k \leqslant \mathrm{X}_1]\Big) \leqslant 2\varepsilon.$$

Comment énoncer le résultat obtenu ?

4. En déduire que $\mathrm{R}_2 > \mathrm{R}_1$ presque sûrement.

La caractérisation

On pose :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x,y) = \mathbb{P}\big([\mathrm{R}_1 \leqslant x] \cap [\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1 > y]\big).$$

5. Soient un couple $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et un réel $h > 0$.

a. Justifier l'égalité :

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big([x < \mathrm{X}_1 \leqslant x+h] \cap \Big(\bigcap_{i=2}^{j}[\mathrm{X}_i \leqslant \mathrm{X}_1]\Big) \cap [\mathrm{X}_{j+1} > y + \mathrm{X}_1]\Big).$$

b. En déduire les inégalités :

$$\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{1-\mathrm{F}(x)}\big(1-\mathrm{F}(x+y+h)\big) \leqslant \varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) \leqslant \frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{1-\mathrm{F}(x+h)}\big(1-\mathrm{F}(x+y)\big).$$

6. a. Calculer, pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h}.$$

On admet l'existence de la limite
$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h}$$
notée $\partial_1\varphi(x,y)$ et appelée *dérivée partielle* de φ par rapport à la première variable au point (x,y) : il s'agit de la dérivée de la fonction $t \longmapsto \varphi(t,y)$ au point x.

b. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \partial_1\varphi(x,y) = \frac{f(x)}{1-\mathrm{F}(x)}\big(1-\mathrm{F}(x+y)\big).$$

7. Dans cette question, on suppose que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a. Établir :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x,y) = (1-\mathbf{e}^{-\lambda x})\mathbf{e}^{-\lambda y}.$$

b. En déduire la loi de $\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1$ puis l'indépendance des variables R_1 et $\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1$.

8. Réciproquement, dans cette question, on suppose que les variables R_1 et $\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1$ sont indépendantes et on note G la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction de répartition de $\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1$.

a. Établir :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{1-\mathrm{F}(x+y)}{1-\mathrm{F}(x)} = 1-\mathrm{G}(y).$$

b. En déduire que les fonctions G et F sont égales puis, à l'aide de la propriété d'absence de mémoire, montrer que la loi de X_1 est exponentielle.