CONCOURS BLANC

Mathématiques 2
Eléments de correction

Premier exercice

1. Après exécution des trois lignes,
- La variable u contient un vecteur ligne formé des n coefficients $n, n^2, \ldots, n^n$;
- la variable v contient un vecteur ligne formé des n coefficients $1!, 2!, \ldots, n!$;
- la variable s contient donc le réel $s_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

2. Le script ci-dessous convient : la variable u contient le terme $\frac{n^k}{k!}$ et la variable s la somme $\sum_{j=0}^{k} \frac{n^j}{j!}$ à mesure que k varie entre 0 (avant d'entrer dans le boucle, ce qui correspond à l'initialisation) et n (en sortie de boucle). Enfin, on renvoie la valeur de s.

Listing 2 : Calcul de s_n

```
function y=f(n)
  u=1;
  s=u;
  for k=1:n
    u=u*n/k;
    s=s+u;
  end
  y=s;
endfunction
```

3. Les instructions proposées ont pour effet de représenter graphiquement la suite de terme général $\mathbf{e}^{-n} s_n$, $n \geqslant 1$. La sortie graphique invite à conjecturer que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$, ou en d'autres termes que $s_n \sim \frac{1}{2}\mathbf{e}^n$ lorsque $n \to \infty$.

4. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Le théorème central limite garantit que

$$\mathrm{S}_n^* = \frac{\mathrm{S}_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Or la variable S_n suit la loi $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si bien que :

$$\mathbf{e}^{-n} s_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{-n} \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n^* \leqslant 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, d'où le résultat.

5. On conserve les notations de la question précédente. Chaque ligne de la matrice X contient une simulation du vecteur $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$. Chaque ligne de `cumsum(X,'c')` contient donc une simulation du vecteur $(\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_n)$. Puisque toutes les lignes de la matrice y sont formées des entiers de 1 à n, les éléments de la j-ième colonne de la matrice T sont des booléens indiquant si l'événement $[\mathrm{S}_j \leqslant j]$ s'est réalisé lors des différentes simulations. L'élément correspondant du vecteur s correspond donc à la fréquence de réalisation de cet événement lors de m simulations, qui peut être assimilée d'après la loi des grands nombres à la probabilité $\mathbb{P}(\mathrm{S}_j \leqslant j)$.
La sortie graphique illustre donc la convergence vers $\frac{1}{2}$ de la suite de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n) = \mathbf{e}^{-n} s_n$, qui était à la base de l'argument développé en **4.**.

Deuxième exercice

1. a. On a $b_k = \mathrm{B}_k - \mathrm{B}_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (même $k=1$), d'où :
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(\mathrm{B}_k - \mathrm{B}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{B}_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{B}_{k-1}$$
puis, par décalage d'indices dans la dernière somme :
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{B}_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\mathrm{B}_k = a_n \mathrm{B}_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\mathrm{B}_k$$
car $\mathrm{B}_0 = 0$.

b. La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant bornée, il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{B}_n| \leqslant \mathrm{M}$. On a alors, par décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \big|(a_n - a_{n+1})\mathrm{B}_n\big| \leqslant \mathrm{M}(a_n - a_{n+1})$$
où la série $\mathrm{M}\sum(a_n - a_{n+1})$ est télescopique convergente, puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge par hypothèse. Il en ressort par comparaison que la série $\sum(a_n - a_{n+1})\mathrm{B}_n$ est absolument convergente.

c. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a tout d'abord la convergence de $a_n\mathrm{B}_n$ vers 0 lorsque $n \to 0$. Par ailleurs, la série $\sum(a_n - a_{n+1})\mathrm{B}_n$ étant absolument convergente d'après **b.** donc convergente, ses sommes partielles convergent.
On en déduit, d'après **a.**, la convergence des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$, qui est donc elle-même convergente.

2. En posant $b_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il vient
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases},$$
et la suite des sommes partielles de la série $\sum b_n$ est donc bornée. Sachant par ailleurs que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle, la règle d'Abel établie en **1.** assure que la série $\sum a_n b_n = \sum(-1)^n a_n$ converge.

3. a. Par sommation géométrique de raison $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \neq 1$ ($\theta \in \left]0, 2\pi\right[$), il vient pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^k = \frac{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta}}{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta/2}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta/2}} \frac{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}(n+1)\theta/2} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta/2}}{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta/2} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta/2}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

b. En identifiant les parties réelle et imaginaire du résultat obtenu en **a.**, on obtient immédiatement les formules attendues :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

c. D'après **b.**, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right| = \frac{\left|\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\right|}{\sin\frac{\theta}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \mathrm{M}.$$

d. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle et les sommes partielles de la série $\sum\cos(n\theta)$ sont bornées d'après **c.**. Dans ces conditions, la règle d'Abel assure que la série $\sum\frac{\cos(n\theta)}{n}$ est convergente.

4. a. La fonction $\varphi : t \longmapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,1]$ avec (à conjecturer puis démontrer par récurrence sur k) :
$$\forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad \forall t \in [0,1], \quad \varphi^{(k)}(t) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+t)^k}.$$
Pour $x \in [0,1]$ donné, on a en particulier :
$$\forall t \in [0,x], \quad \left|\varphi^{(n+1)}(t)\right| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leqslant n!.$$
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction φ sur le segment $[0,x]$, on obtient donc :
$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| = \left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{n!}{(n+1)!}x^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

En écrivant cette relation pour $x = 1$, on obtient :

$$\Big|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où, par encadrement, la convergence [2] et la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

b. Les formules de trigonométrie élémentaire donnent :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big).$$

Cette formule ainsi que celle de la question **3.b.** amènent alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n'(\theta) = -\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = -\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\cos\big((n+\frac{1}{2})\theta\big) - \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème fondamental appliqué à la fonction f_n, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0, 2\pi[$, assure que :

$$\begin{aligned}\forall \theta \in \,]0, 2\pi[, \quad f_n(\theta) &= f_n(\pi) + \int_\pi^\theta f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(\pi) - \frac{1}{2}\int_\pi^\theta \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_\pi^\theta \frac{\cos\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= f_n(\pi) - \Big[\ln\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)\Big]_\pi^\theta + \frac{1}{2}\int_\pi^\theta \frac{\cos\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= f_n(\pi) - \ln\Big(\sin\frac{\theta}{2}\Big) + \frac{1}{2}\int_\pi^\theta \frac{\cos\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

d. Pour $\theta \in \,]0, 2\pi[$, une intégration par parties donne :

$$\int_\pi^\theta \frac{\cos\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\Big[\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\sin\frac{t}{2}}\Big]_\pi^\theta + \frac{1}{2n+1}\int_\pi^\theta \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

où, par inégalité triangulaire,

$$\Big|\Big[\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\sin\frac{t}{2}}\Big]_\pi^\theta\Big| \leqslant 1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

et (on ajoute des valeurs absolues autour de l'intégrale de droite pour renverser les bornes si $\theta \leqslant \pi$) :

$$\Big|\int_\pi^\theta \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \Big|\int_\pi^\theta \Big|\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\Big|\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \Big|\int_\pi^\theta \frac{\big|\cos\frac{t}{2}\big|}{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Dans ces conditions, les deux termes au membre de droite de (1) convergent vers 0 par encadrement lorsque $n \to \infty$ si bien que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\pi^\theta \frac{\cos\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 0.$$

e. En passant à la limite lorsque $n \to \infty$ dans la relation de la question **c.**, on obtient d'après les questions **a.** et **d.** :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \ln\Big(\sin\frac{\theta}{2}\Big) = -\ln 2 - \ln\Big(\sin\frac{\theta}{2}\Big).$$

2. Qui résulte aussi du critère établi en **2.** (critère spécial de convergence des séries alternées) ou de l'exemple traité en **3.** avec $\theta = \pi$.

Problème

En guise d'introduction, on peut remarquer que pour $p \leqslant q$, on a $0 \leqslant \mathrm{Y}_q \leqslant \mathrm{Y}_p$ d'où, par domination :

- si Y_p admet une espérance, alors Y_q aussi ;
- si Y_q n'admet pas d'espérance, alors Y_p non plus.

Il en ressort que X est implosive d'indice $m \geqslant 2$ donné si, et seulement si, Y_m admet une espérance alors que Y_{m-1} n'en admet pas, en convenant que $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{X}$.

Première partie

1. Pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$, les variables $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées :

$$\mathrm{F}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant x) = \mathbb{P}\big(\min(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n) \leqslant x\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} [\mathrm{X}_k \leqslant x]\Big)$$
$$= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} [\mathrm{X}_k > x]\Big) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_k > x) = 1 - \big(1 - \mathrm{F}(x)\big)^n.$$

2. Puisque la variable X est à densité, sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ avec pour dérivée f sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini Δ de points. Dans ces conditions, la fonction de répartition obtenue pour Y_n à la question **1.** est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ avec pour dérivée $x \longmapsto nf(x)\big(1 - \mathrm{F}(x)\big)^{n-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \Delta$. La variable Y_n est donc à densité et admet (par exemple) pour densité

$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto nf(x)\big(1 - \mathrm{F}(x)\big)^{n-1}.$$

3. Sachant que V est positive, sa densité est nulle sur $\mathbb{R}_-$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

et, sous réserve d'existence,

$$\mathbb{E}(\mathrm{V}) = \int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse, la fonction Φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, de dérivée $\Phi' = \varphi$.

a. Pour $x \geqslant 0$, une intégration par parties sur le segment $[0, x]$ donne, en primitivant φ en $\Phi - 1$:

$$\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \big[t\big(\Phi(t) - 1\big)\big]_0^x - \int_0^x \big(\Phi(t) - 1\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t - x\big(1 - \Phi(x)\big).$$

b. On a tout d'abord :

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x\big(1 - \Phi(x)\big) = x\,\mathbb{P}(\mathrm{V} > x) = x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

où le membre de droite tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$ comme queue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, convergente puisque V admet une espérance.

Il en ressort par encadrement que $x\big(1 - \Phi(x)\big)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$, et donc d'après **a.** que

$$\int_0^x \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + x\big(1 - \Phi(x)\big) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}(\mathrm{V}).$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et égale à $\mathbb{E}(\mathrm{V})$.

c. Puisque $1 - \Phi$ est positive et d'intégrale convergente, il vient d'après **a.** :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi les intégrales partielles de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ sont majorées et, comme la fonction $t \longmapsto t\varphi(t)$ est positive, cela entraîne la convergence (absolue) de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui signifie que V admet une espérance.

d. L'équivalence résulte de **b.** (avec la valeur de l'intégrale précisée ci-dessus) et **c.**.

Deuxième partie

4. a. Puisque f est une densité,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \alpha\frac{\pi}{2},$$

d'où l'on déduit la valeur de $\alpha = \frac{2}{\pi}$.

b. Le calcul donne immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\arctan x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

c. D'après **1.**,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_2(x) = 1 - \big(1-\mathrm{F}(x)\big)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \big(1 - \frac{2}{\pi}\arctan x\big)^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Comme X est à densité, on a vu en **2.** que Y_2 est à densité donnée par

$$f_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2f(x)\big(1-\mathrm{F}(x)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\big(1 - \frac{2}{\pi}\arctan x\big) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

d. Plusieurs méthodes sont possibles, parmi lesquelles :

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition,

$$y = \arctan\frac{1}{x} \iff \begin{cases} y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \tan y = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Or $\arctan x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ puisque $x > 0$, si bien que $\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et par ailleurs

$$\tan\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan x\Big) = \frac{1}{\tan(\arctan x)} = \frac{1}{x},$$

d'où le résultat :

$$\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

- Une autre possibilité consiste à travailler sur la fonction $\varphi : x \longmapsto \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à sa limite en $+\infty$: $\frac{\pi}{2}$, d'où le résultat.

e. Lorsque $x \to +\infty$,

$$f_2(x) = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{1+x^2}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan x\Big) = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{1+x^2}\arctan\frac{1}{x} \sim \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{x^3}.$$

f. On vient de voir que $xf_2(x) \sim \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{x^2} \geqslant 0$ lorsque $x \to +\infty$, ce qui assure la convergence (absolue) de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_2(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Par ailleurs, $xf(x) \sim \frac{2}{\pi}\frac{1}{x} \geqslant 0$ lorsque $x \to +\infty$, d'où l'on déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Ainsi Y_2 admet une espérance alors que X n'en admet pas : la variable X est donc implosive d'indice 2.

5. a. La série de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$, $k \geqslant 0$, est télescopique convergente :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\Big) = 1.$$

b. En majorant $k+1$ par $k+2$ au dénominateur, il vient :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad k\,\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = k\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}} &= \frac{k}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})} \\ &\geqslant \frac{k}{2(k+2)^{3/2}} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 0, \quad k \to \infty,\end{aligned}$$

de sorte que la série $\sum_k k\,\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ diverge par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum_k \frac{1}{\sqrt{k}}$. La variable X n'admet donc pas d'espérance.

c. Par télescopage,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{k} \Big(\frac{1}{\sqrt{j+1}} - \frac{1}{\sqrt{j+2}} \Big) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

d. D'après **1.**,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_2 \leqslant k) = 1 - \big(1 - F(k)\big)^2 = 1 - \frac{1}{k+2}.$$
Dès lors,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_2 = k) = \mathbb{P}(Y_2 \leqslant k) - \mathbb{P}(Y_2 \leqslant k-1) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$
puis
$$k\,\mathbb{P}(Y_2 = k) = \frac{k}{(k+1)(k+2)} \sim \frac{1}{k} \geqslant 0, \quad k \to \infty$$
est le terme général d'une série divergente et Y_2 n'admet donc pas d'espérance.

e. Sur le même principe,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_3 \leqslant k) = 1 - \big(1 - F(k)\big)^3 = 1 - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}$$
puis
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_3 = k) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}$$
et cette fois-ci
$$\begin{aligned} k\,\mathbb{P}(Y_3 = k) &= k\frac{(k+2)^{3/2} - (k+1)^{3/2}}{(k+1)^{3/2}(k+2)^{3/2}} \sim k\frac{k^{3/2}}{k^3}\Big[\Big(1 + \frac{2}{k}\Big)^{3/2} - \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{3/2}\Big] \\ &= \frac{1}{k^{1/2}}\Big[\frac{3}{2}\frac{2}{k} - \frac{3}{2}\frac{1}{k} + o\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big] \sim \frac{3}{2k^{3/2}} \geqslant 0 \end{aligned}$$
est le terme général d'une série absolument convergente par comparaison aux séries de Riemann car $\frac{3}{2} > 1$. La variable Y_3 admet donc une espérance.

f. D'après les réponses aux questions **b.**, **d.** et **e.**, la variable X est implosive d'indice 3.

Troisième partie

6. a. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, positive pour $a \geqslant 0$ et d'intégrale convergente puisque $\alpha > 1$, c'est une densité de probabilité si, et seulement si,
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = a\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{a}{\alpha - 1}.$$
Ainsi pour que f soit une densité, il faut et il suffit que $a = \alpha - 1$.

b. La fonction de répartition F de X est donnée par
$$F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

c. La variable X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale de Riemann
$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = (\alpha - 1)\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha-1}}$$
converge absolument i.e. si, et seulement si, $\alpha > 2$.

d. Pour $n \geqslant 1$, la fonction de répartition de Y_n est donnée par
$$F_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 - \big(1 - F(x)\big)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{n(\alpha-1)}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$
Pour gagner un peu de temps, on utilise le critère établi en **3.** : la variable positive Y_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F_n(t)\big)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n(\alpha-1)}}$$
converge i.e. si, et seulement si, $n(\alpha - 1) > 1$ ou encore $\alpha > 1 + \frac{1}{n}$.

e. Pour $m \geqslant 2$ donné, on a vu en introduction que X est implosive d'indice m si, et seulement si, Y_m admet une espérance mais pas Y_{m-1} c'est-à-dire d'après **d.** si, et seulement si, $1+\frac{1}{m} < \alpha \leqslant 1+\frac{1}{m-1}$. Comme $1+\frac{1}{m} < 1+\frac{1}{m-1}$, il possible de choisir $\alpha > 1$ satisfaisant la condition précédente, et la variable X correspondante est donc implosive d'indice m.

Quatrième partie

7. a. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Elle est positive si, et seulement si, $a \geqslant 0$. Elle admet pour primitive sur $]2,+\infty[$ la fonction $x \longmapsto -\frac{a}{\ln x}$ qui admet une limite finie en $+\infty$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et vaut $\frac{a}{\ln 2}$. Ainsi, pour que f soit une densité de probabilité, il faut et il suffit que $a = \ln 2$.

b. La variable X admet pour répartition

$$\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1-\frac{\ln 2}{\ln x} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

c. On observe que $0 \leqslant \frac{1}{x} = o\big(xf(x)\big)$ lorsque $x \to +\infty$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est donc divergente par comparaison à l'intégrale divergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et la variable X n'admet pas d'espérance.

d. Pour $n \geqslant 2$, la variable Y_n admet pour répartition

$$\mathrm{F}_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1-\frac{\ln^n 2}{\ln^n x} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Par le même argument qu'en **c.**, on montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1-\mathrm{F}_n(t)\big)\,\mathrm{d}t$ diverge. La variable positive Y_n n'admet donc pas d'espérance d'après **3.**.

e. Aucune des variables Y_n, $n \geqslant 2$, n'admettant d'espérance d'après **d.**, la variable X n'est pas implosive, bien qu'elle n'ait pas d'espérance d'après **c.**.

Cinquième partie

8. La fonction de répartition $\mathrm{F_Y}$ de Y étant à valeurs dans $[0,1]$, celle de X est donnée d'après **1.** par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = 1-\big(1-\mathrm{F_Y}(x)\big)^{1/n}.$$

9. On note $q = 1-p$. La fonction de répartition $\mathrm{F_Y}$ d'une variable de loi géométrique de paramètre p vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{F_Y}(k) = \sum_{j=1}^{k} q^{j-1}p = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1-q^k.$$

Plus précisément, puisque Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, elle est donnée par

$$\mathrm{F_Y} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

D'après la question **8.**, si X est une variable implosive d'indice m implosant sur Y, alors elle admet pour fonction de répartition

$$\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1-\big(1-\mathrm{F_Y}(x)\big)^{1/m} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-q^{\lfloor x \rfloor/m} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

La fonction de répartition étant caractéristique de la loi, la variable X devrait donc suivre la loi géométrique de paramètre $1-q^{1/m}$, mais une telle variable admet une espérance et n'est donc pas implosive. Bref, il n'existe donc aucune variable implosant sur une variable de loi géométrique.

10. Il suffit de considérer une variable X implosive d'indice m (il en existe d'après la question **6.**) et de poser $Y = X_m$.

11. Soit donc un entier $k \leqslant m$. Une variable implosant à l'indice k sur Y a nécessairement pour fonction de répartition $\mathrm{F}^* : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1-\big(1-\mathrm{G}(x)\big)^{1/k}$. Cette fonction étant (comme G) croissante, continue à droite et de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, c'est la fonction de répartition d'une variable X^*.

D'après la question **1.**, les fonctions de répartition des variables $Y_n^* = \min(X_1^*, \dots, X_n^*)$, $n \in \mathbb{N}^*$, associées à X^* sont données par $F_n^* : x \longmapsto 1 - \big(1 - F^*(x)\big)^n = 1 - \big(1 - G(x)\big)^{n/k}$. En particulier, $F_k^* = G$ si bien que Y_k^* a même loi que Y ; elle admet donc une espérance car X implose sur Y.
En revanche, on déduit de l'inégalité $k \leqslant m$ que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant 1 - F_{m-1}(x) = \big(1 - G(x)\big)^{1-1/m} \leqslant \big(1 - G(x)\big)^{1-1/k} = 1 - F_{k-1}^*(x)$$

où, comme la variable positive Y_{m-1} n'admet pas d'espérance, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - F_{m-1}(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est divergente d'après **3.**. Il en résulte par comparaison que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - F_{k-1}^*(t)\big)\,\mathrm{d}t$ diverge également, ce qui signifie que la variable Y_{k-1}^* n'admet pas d'espérance.
Ainsi (d'après l'introduction) X^* est implosive d'indice k et implose sur Y.

Sixième partie

12. Deux cas peuvent se présenter :
- ➢ Si X admet une espérance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1 + \cdots + X_n$ en admet une aussi, ainsi que Z_n par domination puisque $0 \leqslant Z_n \leqslant X_1 + \cdots + X_n$. La variable X n'est donc pas explosive.
- ➢ Si X n'admet pas d'espérance, alors Z_2 n'en admet pas non plus car $Z_2 \geqslant X_1 \geqslant 0$. La variable X est donc explosive d'indice 2.

En conclusion, la variable X est explosive si, et seulement si, elle n'admet pas d'espérance, et son indice d'explosion est alors égal à 2.

13. D'après la question **12.**, n'importe quelle variable X admettant une espérance fournit un exemple de variable non explosive : c'est donc le cas des variables de lois binomiale, géométrique, de Poisson, exponentielle et γ...