Chapitre 15 :

ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

1. Endomorphismes et matrices symétriques

1.1 Endomorphismes symétriques

Dans toute cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.1 *Un endomorphisme u de* E *est dit* ***symétrique*** *(ou* ***auto-adjoint****) si :*

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \qquad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle .$$

Remarque 1.2 • La condition précédente signifie que les rôles de x et y sont symétriques dans l'expression $\langle u(x), y \rangle$.
• Il suffit de vérifier la condition de la définition lorsque x et y sont des vecteurs de base.

Exemple 1.3 Un projecteur p donné de E est symétrique si, et seulement si, c'est un projecteur orthogonal.

Proposition 1.4 *Soit u un endomorphisme de* E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) l'endomorphisme u est symétrique ;
(ii) l'endomorphisme u est représenté par une matrice symétrique dans une base orthonormale *de* E *;*
(iii) l'endomorphisme u est représenté par une matrice symétrique dans toute base orthonormale *de* E.

Remarque 1.5 Par définition, une matrice symétrique $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. définie-positive) si la forme bilinéaire $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longmapsto {}^t\mathrm{XAY}$ sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui lui est canoniquement associée est positive (resp. définie-positive) i.e. :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t\mathrm{XAX} \geqslant 0 \qquad \Big(\text{resp. } \forall \mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t\mathrm{XAX} > 0\Big).$$

De même, un endomorphisme symétrique u sur un espace vectoriel euclidien E induit une forme bilinéaire symétrique $\varphi : (x, y) \longmapsto \langle u(x), y \rangle$ sur E. On dira que l'endomorphisme u est positif (resp. défini-positif) si la forme bilinéaire symétrique φ est positive (resp. définie-positive) i.e. :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \langle u(x), x \rangle \geqslant 0 \qquad \Big(\text{resp. } \forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}, \langle u(x), x \rangle > 0\Big).$$

1.2 Réduction des endomorphismes symétriques

On conserve les notations de la section précédente.

Proposition 1.6 *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique de* E *sont deux-à-deux orthogonaux.*

Proposition 1.7 *Soient u un endomorphisme symétrique et* F *un sous-espace de* E.
Si F *est stable par u, alors* $\mathrm{F}^\perp$ *est aussi stable par u.*

Remarque 1.8 Si l'on a déjà trouvé des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ pour un endomorphisme u symétrique, et déterminé les sous-espaces propres $\mathrm{E}_{\lambda_1}, \dots, \mathrm{E}_{\lambda_r}$ associés, les vecteurs propres restants (desquels on déduira les valeurs propres restantes) seront à rechercher dans le sous-espace propre $\mathrm{G} = \big(\bigoplus_{i=1}^r \mathrm{E}_{\lambda_i}\big)^\perp$. Ce dernier étant stable, on pourra s'intéresser à la matrice de l'endomorphisme induit par u sur G dans une base bien choisie.

Lemme 1.9 *Tout endomorphisme symétrique de* E *admet (au moins) une valeur propre.*

Théorème 1.10 *Soit u un endomorphisme symétrique de* E.
Les sous-espaces propres de u sont supplémentaires orthogonaux. De manière équivalente, il existe une base orthonormale de E *dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale.*

1.3 Réduction des matrices symétriques réelles

L'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique.

Théorème 1.11 *Soit* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique.*
Les sous-espaces propres de A *sont supplémentaires orthogonaux dans* $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *De manière équivalente, il existe une matrice* $P \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})$ *orthogonale et une matrice* $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonale telles que :*

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

Remarques 1.12 • Une matrice symétrique $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ peut être diagonalisée par une matrice de passage P non orthogonale ! Cependant, le choix d'une matrice orthogonale permet d'épargner le calcul de P^{-1}, qui s'obtient alors par simple transposition ; il est donc intéressant lorsque ce calcul est nécessaire par la suite (calcul de puissances de matrices, ...). Ce choix s'avère également pertinent dans de nombreuses situations théoriques (cf. travaux dirigés).

- En pratique, pour diagonaliser une matrice symétrique réelle A avec une matrice de passage orthogonale, on détermine les sous-espaces propres, on choisit une base orthonormale de chacun d'eux puis il ne reste qu'à constituer la matrice P, automatiquement orthogonale, dont les colonnes sont les vecteurs ainsi choisis.
- Attention ! Une matrice symétrique à coefficients complexes n'est en général pas diagonalisable. C'est le cas de la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C}).$$

Exemple 1.13 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $P \in \mathbf{Gl}_3(\mathbb{R})$ orthogonale telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Proposition 1.14 *Soit* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique.*
En notant $(X_1, \dots, X_n)$ *une base* orthonormale *de* $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *formée de colonnes propres de* A *et* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *les valeurs propres associées, on a :*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^tX_i.$$

Remarque 1.15 Tout projecteur orthogonal p de l'espace euclidien E est symétrique et est donc à ce titre représenté en base orthonormale $\underline{e}$ par une matrice A symétrique.
Si $(u_1, \dots, u_r)$ est une base orthonormale de $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $(u_{r+1}, \dots, u_n)$ une base orthonormale de $F^\perp = \operatorname{Ker} p$, alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour p, respectivement associés à la valeur propre 1 pour les r premiers et 0 pour les suivants. En notant $U_1, \dots, U_n$ les colonnes des coordonnées de ces vecteurs en base $\underline{e}$, l'énoncé précédent donne donc $A = \sum_{i=1}^{r} U_i {}^tU_i$: le résultat précédent généralise donc une formule établie dans le chapitre précédent.

2. Application à l'étude du signe d'une forme quadratique

2.1 Formes quadratiques

Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques. Ces deux espaces sont canoniquement isomorphes : on notera en minuscules (x, y, ...) les éléments de $\mathbb{R}^n$ et en majuscules (X, Y, ...) les éléments de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui leur correspondent.

Définition 2.1 *On appelle* ***forme quadratique*** *sur* $\mathbb{R}^n$ *toute application* $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *pour laquelle existe une forme bilinéaire* φ *sur* $\mathbb{R}^n$ *telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad q(x) = \varphi(x, x).$$

Exemple 2.2 Le carré d'une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est une forme quadratique.

Proposition 2.3 *Soit* q *une forme quadratique sur* $\mathbb{R}^n$.
On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x).$$

Remarque 2.4 En revanche, on ne dispose pas de formule pour $q(x + y)$ sans faire intervenir la forme bilinéaire φ :

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad q(x + y) = q(x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + q(y).$$

Proposition 2.5 *Une application* $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une forme quadratique si, et seulement si, il existe une matrice* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad q(x) = {}^t\mathrm{XAX} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Exemple 2.6 Les formes bilinéaires φ_1 et φ_2 sur $\mathbb{R}^2$ canoniquement associées aux matrices

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

définissent la même forme quadratique :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad {}^t\mathrm{XA}_1\mathrm{X} = {}^t\mathrm{XA}_2\mathrm{X} = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = q(x).$$

Remarque 2.7 À toute matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est canoniquement associée une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ et donc une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Mais cette association n'est pas bijective comme on vient de le voir. De même, à tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ est associée la forme bilinéaire $\varphi : (x, y) \longmapsto \langle u(x), y\rangle$ sur $\mathbb{R}^n$ et donc la forme quadratique $q : x \longmapsto \langle u(x), x\rangle$.

2.2 Lien avec les endomorphismes et matrices symétriques

Comme on vient de le voir, il n'y a pas unicité de la forme bilinéaire φ à l'origine d'une forme quadratique q. Il y a cependant unicité d'une telle forme bilinéaire *symétrique* :

Proposition 2.8 *Soit* q *une forme quadratique sur* $\mathbb{R}^n$.
Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ *sur* $\mathbb{R}^n$*, appelée* ***forme polaire*** *de* q*, telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad q(x) = \varphi(x, x).$$

Remarque 2.9 On dira qu'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ est positive (resp. définie-positive) si sa forme polaire φ est positive (resp. définie positive).

D'un point de vue matriciel ou géométrique, le résultat précédent prend la forme suivante.

Proposition 2.10 *Soit* q *une forme quadratique sur* $\mathbb{R}^n$.
(i) Il existe une unique matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique *telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad q(x) = {}^t\mathrm{XAX}.$$

(ii) Il existe un unique endomorphisme u symétrique *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad q(x) = \langle u(x), x\rangle.$$

La matrice A *représente l'endomorphisme u en base canonique.*
On dira que A *et u sont respectivement les matrice et endomorphisme* symétriques *associés à q.*

Remarque 2.11 Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, la forme quadratique qui lui est canoniquement associée s'écrit, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Exemple 2.12 Déterminer la matrice symétrique $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ associée à la forme quadratique :

$$q : x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3.$$

2.3 Étude du signe d'une forme quadratique

Les résultats de ce paragraphe sont à la limite du programme. Ils doivent systématiquement être redémontrés.

Lemme 2.13 *Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé. Soient $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base* orthonormale *de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.*
Pour $x \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans la base $\underline{e}$, on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, x \rangle^2 .$$

Proposition 2.14 *Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé. En notant α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de u, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \|x\|^2 \leqslant q(x) \leqslant \beta \|x\|^2 .$$

Un vecteur $x \neq 0$ réalise l'égalité dans l'inégalité de gauche (resp. de droite) si, et seulement si, il est propre pour u, associé à la valeur propre α (resp. β).

Théorème 2.15 *Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé.*
(i) Si les valeurs propres de u sont toutes positives ou nulles (resp. toutes négatives ou nulles), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad q(x) \geqslant 0 \quad (\textit{resp. } q(x) \leqslant 0).$$

(ii) Si les valeurs propres de u sont toutes strictement positives (resp. toutes strictement négatives), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad q(x) > 0 \quad (\textit{resp. } q(x) < 0).$$

(iii) Si u admet 0 *pour valeur propre, alors :*

$$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad q(x) = 0.$$

(iv) Si u admet deux valeurs propres non nulles de signes contraires, alors :

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad q(x)q(y) < 0.$$

Remarque 2.16 Dans les deux énoncés précédents, les valeurs propres de u sont aussi celles de la matrice *symétrique* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ associée à q.

Remarque 2.17 Dans l'énoncé précédent, les assertions (iii) et (iv) montrent que (i) et (ii) sont des équivalences, mais la réciproque de (iii) est fausse.

Corollaire 2.18 *Soient φ une forme bilinéaire* symétrique *sur $\mathbb{R}^n$ et* A *sa matrice en base canonique.*
(i) La forme bilinéaire φ est positive si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A *sont positives ou nulles.*

(ii) La forme bilinéaire φ est définie-positive si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A *sont strictement positives.*

Remarque 2.19 L'énoncé précédent vaut pour une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E de dimension finie et A une matrice qui la représente dans une base quelconque de E.

Il en ressort la caractérisation suivante des matrices symétriques positives (resp. définies-positives), que l'on demande fréquemment de redémontrer dans les épreuves de concours.

Corollaire 2.20 *Soit* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique.*
(i) La matrice A *est positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.*
(ii) La matrice A *est définie-positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont strictement positives.*