*Chapitre 13 :*

# FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES : CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout le chapitre et sauf mention explicite du contraire, les fonctions considérées sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On reprend les notations du chapitre précédent.

## 1. Objets du calcul différentiel du premier ordre

On considère dans ce paragraphe un ouvert $\mathcal{U}$ non vide de $\mathbb{R}^n$, un point $\mathrm{A} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$ ainsi qu'une fonction $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$.

### *1.1 Dérivées partielles et gradient*

Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on définit l'ensemble $\mathcal{U}_{\mathrm{A},j} = \{x \in \mathbb{R} : (a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $a_j$ puisque $\mathcal{U}$ est ouvert. On définit alors la $j$-ième fonction partielle de $f$ au point A :

$$f_{\mathrm{A},j} : \mathcal{U}_{\mathrm{A},j} \longrightarrow \mathbb{R}, x_j \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Il s'agit de la fonction obtenue en fixant toutes les composantes de $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ égales à celles de A sauf la $j$-ième qu'on laisse varier. On obtient ainsi une fonction d'une variable, ce qui permet de donner la définition suivante.

Définition 1.1 *Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On dit que $f$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable $x_j$ au point* A *lorsque la fonction partielle $f_{\mathrm{A},j}$ est dérivable en $a_j$. Dans ces conditions, on appelle* ***dérivée partielle*** *de $f$ par rapport à la $j$-ième variable $x_j$ au point* A*, et l'on note $\partial_j f(\mathrm{A})$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{A})$, le réel défini par :*

$$\partial_j f(\mathrm{A}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{A}) = f'_{\mathrm{A},j}(a_j) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t}\Big(f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)\Big).$$

*Remarque 1.2* Seule la notation $\partial_j f$ est au programme. Elle présente, comme la notation $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, des avantages et des inconvénients :

- l'utilisation de la notation $\partial_j f$ suppose que les variables de $f$ sont ordonnées, ce qui est le cas si on les note $x_1, \ldots, x_n$, mais est moins évident si on les appelle $a$, $x$ et $\alpha$...
- la notation $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sous-entend que le point générique de $\mathcal{U}$ est noté $(x_1, \ldots, x_n)$ ; si l'on définit plutôt $f$ par une formule du type $f(y_1, \ldots, y_n) = \cdots$, alors ses dérivées partielles seront notées $\frac{\partial f}{\partial y_j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Il est donc intéressant de savoir manipuler les deux. Pour des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, il est d'usage de noter (par défaut) les variables $x$, $y$ et éventuellement $z$, et donc les dérivées partielles $\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$, et éventuellement $\partial_3 f = \frac{\partial f}{\partial z}$.

*Exemple 1.3* Étudier l'existence de dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pour la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x^3 - \ln(1 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Définition 1.4 *Si $f$ admet en* A *des dérivées partielles par rapport à toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$, on appelle* ***gradient*** *de $f$ en* A*, et l'on note $\nabla f(\mathrm{A})$, le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par la formule :*

$$\nabla f(\mathrm{A}) = \big(\partial_1 f(\mathrm{A}), \partial_2 f(\mathrm{A}), \ldots, \partial_n f(\mathrm{A})\big).$$

*Exemple 1.5* Déterminer le gradient de la fonction $f : \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|\mathrm{X}\|^2$ en tout point $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n$.



### *1.2 Dérivées directionnelles*

Soit V un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On a vu dans le chapitre précédent que la droite $\mathcal{D}_{\mathrm{A},\mathrm{V}}$ passant par le point A et dirigée par le vecteur V est paramétrée par l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{A} + t\mathrm{V}$.

Étudier le comportement de $f(X)$ lorsque X varie au voisinage de A sur la droite $\mathcal{D}_{A,V}$ revient donc à étudier la fonction **fonction partielle** $t \longmapsto f(A+tV)$ au voisinage de 0. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, l'ensemble de définition de la fonction partielle précédente contient un intervalle de la forme $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

DÉFINITION 1.6 *On dit que la fonction $f$ admet une **dérivée directionnelle** en A selon le vecteur V si la fonction partielle $t \longmapsto f(A+tV)$ est dérivable en 0, i.e. si la limite ci-dessous existe et est finie :*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(A+tV)-f(A)}{t} ;$$

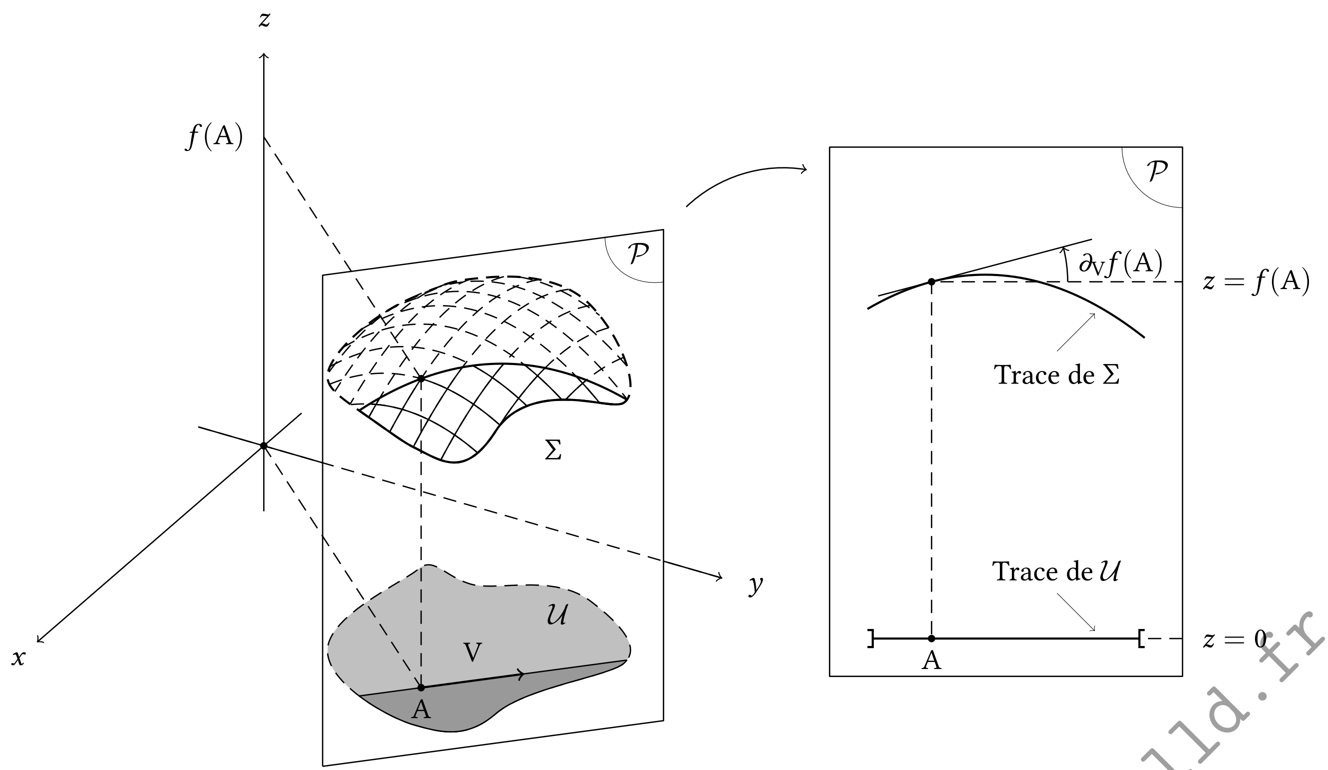
*on la note alors $\partial_V f(A)$ :*

$$\partial_V f(A) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(A+tV)-f(A)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(A+tV)\big)\Big|_{t=0}.$$

*Remarques 1.7* • La notion de dérivée directionnelle est plus générale que celle de dérivée partielle. En effet, la notion de dérivée partielle par rapport à la variable $x_j$ coïncide avec celle de dérivée directionnelle dans la direction du $j$-ième vecteur $E_j$ de la base canonique : $\partial_j f(A) = \partial_{E_j} f(A)$.

• La dérivée directionnelle $\partial_V f(A)$ peut être interprétée comme le taux d'accroissement infinitésimal de $f$ au point A dans la direction V.

*Remarque 1.8 (Interprétation géométrique d'une dérivée directionnelle)* Pour les besoins du dessin, on considère l'exemple d'une fonction $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles. Lorsqu'elle existe, la dérivée directionnelle $\partial_V f(A)$ admet l'interprétation géométrique suivante.
On considère le graphe $\Sigma$ de la fonction $f$, qui est une surface dans l'espace. Le plan vertical $\mathcal{P}$ passant par le point A et contenant le vecteur V rencontre $\mathcal{U}$ selon une portion ouverte de droite et le graphe $\Sigma$ de la fonction $f$ selon une courbe $\Gamma$. Dans ces conditions, le réel $\partial_V f(A)$ est égal à la pente de la tangente à $\Gamma$ au point A dans le plan $\mathcal{P}$.




*Exemple 1.9* Soient A un point de $\mathbb{R}^n$ distinct de l'origine, extrémité d'un vecteur V, et W un vecteur non nul orthogonal à V. Déterminer les dérivées de la fonction $f : X \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|X\|^2$ au point A dans les directions V et W.

### 1.3 Développement limité

Définition 1.10 *On dit que $f$ admet un **développement limité** du premier ordre au point $\mathrm{A}$ s'il existe des réels $\alpha$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$ ainsi qu'une fonction $\varepsilon$ définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{U}$ voisin de $\mathrm{A}$ :*

$$f(\mathrm{X}) = \alpha + \beta_1(x_1 - a_1) + \cdots + \beta_n(x_n - a_n) + \|\mathrm{X} - \mathrm{A}\| \, \varepsilon(\mathrm{X} - \mathrm{A})$$

*et :*

$$\lim_{\mathrm{H} \to 0} \varepsilon(\mathrm{H}) = 0.$$

*Remarques 1.11* • La deuxième condition s'écrit encore : $\varepsilon$ est continue en 0 et $\varepsilon(0) = 0$.

• Dans les conditions précédentes, on note :

$$f(\mathrm{X}) = \alpha + \beta_1(x_1 - a_1) + \cdots + \beta_n(x_n - a_n) + o(\|\mathrm{X} - \mathrm{A}\|), \quad \mathrm{X} \to \mathrm{A}.$$

Proposition 1.12 *Si $f$ admet un développement limité du premier ordre en $\mathrm{A}$, alors elle est continue en $\mathrm{A}$, admet en ce point des dérivées partielles par rapport à chaque variable et l'on a :*

$$f(\mathrm{X}) = f(\mathrm{A}) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(\mathrm{A})(x_j - a_j) + o(\|\mathrm{X} - \mathrm{A}\|), \quad \mathrm{X} \to \mathrm{A},$$

*c'est-à-dire :*

$$f(\mathrm{X}) = f(\mathrm{A}) + \langle \nabla f(\mathrm{A}), \mathrm{X} - \mathrm{A} \rangle + o(\|\mathrm{X} - \mathrm{A}\|), \quad \mathrm{X} \to \mathrm{A}.$$

*Exemple 1.13* Montrer que la fonction $f : \mathrm{X} \longmapsto \|\mathrm{X}\|^2$ admet en tout point $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n$ un développement limité du premier ordre que l'on déterminera.

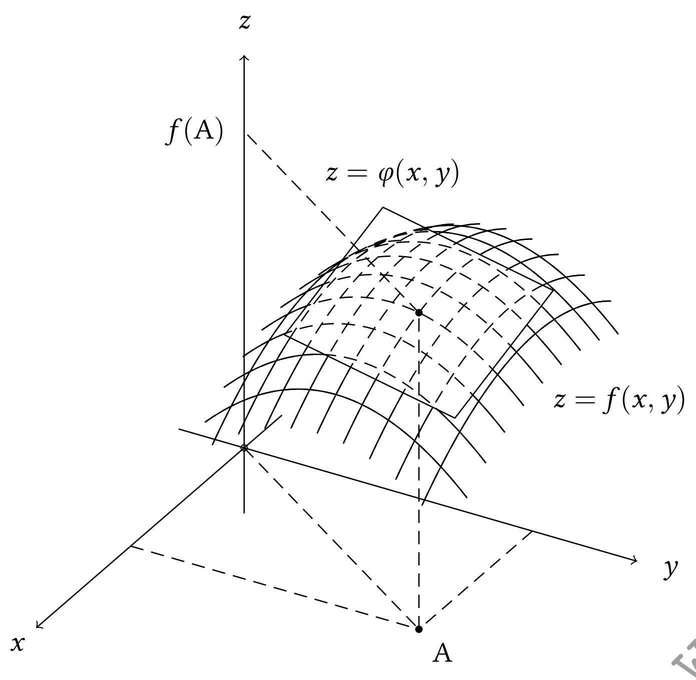
*Remarque 1.14* Dans ces conditions, l'application affine

$$\varphi : \mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(\mathrm{A}) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(\mathrm{A})(x_j - a_j) = f(\mathrm{A}) + \langle \nabla f(\mathrm{A}), \mathrm{X} - \mathrm{A} \rangle$$

est appelée **application affine tangente** ou **meilleure approximation affine** de $f$ au voisinage de $\mathrm{A}$. Son graphe, l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation

$$y = f(\mathrm{A}) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(\mathrm{A})(x_j - a_j),$$

est appelé **hyperplan tangent** au graphe de $f$ au point $\mathrm{A}$.



Corollaire 1.15 *Si $f$ admet un développement limité du premier ordre en $A$, alors elle admet en ce point une dérivée directionnelle selon toute direction $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ donnée par :*

$$\partial_V f(A) = \langle \nabla f(A), V \rangle .$$

*Si de plus $V$ est unitaire, alors $|\partial_V f(A)| \leqslant \|\nabla f(A)\|$. De plus, l'égalité $\partial_V f(A) = \|\nabla f(A)\|$ est réalisée si, et seulement si, $V$ est colinéaire et de même sens à $\nabla f(A)$.*

*Remarque 1.16* Ainsi le gradient $\nabla f(A)$ indique la direction de plus forte croissance. Pour la culture, on pourra également retenir que la dérivée directionnelle de $f$ suivant une direction tangente à une courbe de niveau est nulle ; autrement dit d'après le corollaire précédent, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

## 2. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Dans ce paragraphe, on considère un ouvert $\mathcal{U}$ non vide de $\mathbb{R}^n$.

### *2.1 Définition et théorème fondamental*

Définition 2.1 *Soit $V$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.*
*On dit qu'une fonction $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une **dérivée directionnelle** sur $\mathcal{U}$ suivant le vecteur $V$ si $f$ admet une dérivée directionnelle $\partial_V f(A)$ en tout point $A \in \mathcal{U}$ suivant le vecteur $V$. On appelle alors dérivée directionnelle de $f$ sur $\mathcal{U}$ suivant le vecteur $V$ la fonction*

$$\partial_V f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, A \longmapsto \partial_V f(A).$$

*Cette définition s'applique en particulier lorsque $V$ est un des vecteurs de la base canonique ; elle donne alors un sens à la notion de dérivée partielle de $f$ sur $\mathcal{U}$.*

*Remarque 2.2* Attention ! Les dérivées directionnelles (donc en particulier les dérivées partielles) sont obtenues par dérivation de fonctions d'une seule variable, mais ce sont des fonctions de plusieurs variables, et leur continuité sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ s'entend bien sûr en ce sens.

Définition 2.3 *On dit qu'une fonction $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **de classe $\mathscr{C}^1$** sur $\mathcal{U}$ si elle admet des dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ sur $\mathcal{U}$ et si ces dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{U}$.*

*Exemple 2.4* Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On admet le théorème suivant.

Théorème 2.5 *Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.*
*La fonction $f$ est continue sur $\mathcal{U}$ et admet en tout point $A \in \mathcal{U}$ un développement limité du premier ordre :*

$$\begin{aligned} f(X) &= f(A) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(A)(x_j - a_j) + o(\|X - A\|) \\ &= f(A) + \langle \nabla f(A), X - A \rangle + o(\|X - A\|) \end{aligned} , \quad X \to A,$$

*que l'on peut aussi écrire, en posant $H = X - A$, qui tend vers $0$ lorsque $X \to A$, sous la forme :*

$$f(A + H) = f(A) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(A) h_j + o(\|H\|) = f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + o(\|H\|), \quad H \to 0.$$

### 2.2 Théorèmes opératoires

La formulation choisie pour les théorèmes opératoires ci-dessous fait intervenir le gradient. On en déduit sans peine des formules donnant les dérivées partielles et directionnelles des fonctions considérées.

Proposition 2.6 *Soient $f, g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.*
*(i) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec :*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{U}, \quad \nabla(\lambda f + g)(\mathrm{A}) = \lambda \cdot \nabla f(\mathrm{A}) + \nabla g(\mathrm{A}).$$

*(ii) La fonction $fg$ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec :*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{U}, \quad \nabla(fg)(\mathrm{A}) = f(\mathrm{A}) \cdot \nabla g(\mathrm{A}) + g(\mathrm{A}) \cdot \nabla f(\mathrm{A}).$$

*(iii) Si $f$ ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, alors $1/f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec :*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{U}, \quad \nabla\Big(\frac{1}{f}\Big)(\mathrm{A}) = -\frac{1}{f(\mathrm{A})^2} \cdot \nabla f(\mathrm{A}).$$

Corollaire 2.7 *Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Proposition 2.8 *Soient deux fonctions $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $\mathrm{I}$ de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(\mathcal{U}) \subset \mathrm{I}$.*
*La fonction $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ avec :*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{U}, \quad \nabla(\varphi \circ f)(\mathrm{A}) = \varphi'\big(f(\mathrm{A})\big) \cdot \nabla f(\mathrm{A}).$$

*Exemple 2.9* Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\nabla f^k(\mathrm{A})$ pour $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.10 *Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_n : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $\mathrm{I}$ de $\mathbb{R}$. On définit la fonction*

$$\gamma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto \gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\big)$$

*et on suppose que $\gamma(\mathrm{I}) \subset \mathcal{U}$.*
*La fonction*

$$f \circ \gamma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f\big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\big)$$

*est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I}$ avec :*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j'(t) \partial_j f\big(\gamma(t)\big) = \big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \big\rangle$$

*où l'on a noté $\gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)\big)$.*

*Exemple 2.11* Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(t^2, 1, \sin t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de $f$.

*Remarque 2.12* Si $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, A un point de $\mathcal{U}$ et V un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, la fonction partielle $u : t \longmapsto f(\mathrm{A} + t\mathrm{V})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage $[-\varepsilon, \varepsilon]$ de 0 (pour un certain $\varepsilon > 0$) avec :

$$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad u'(t) = \langle \nabla f(\mathrm{A} + t\mathrm{V}), \mathrm{V} \rangle .$$

- On retrouve en particulier, pour $t = 0$, la dérivée directionnelle de $f$ : $u'(0) = \partial_{\mathrm{V}} f(\mathrm{A}) = \langle \nabla f(\mathrm{A}), \mathrm{V} \rangle$.
- Il résulte alors du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral que, pour deux points $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{U}$ tels que $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] \subset \mathcal{U}$, on a :

$$f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) + \int_0^1 \big\langle \nabla f\big(\mathrm{A} + t(\mathrm{B} - \mathrm{A})\big), \mathrm{B} - \mathrm{A} \big\rangle \, \mathrm{d}t.$$

## 3. Calcul différentiel du second ordre

Dans ce paragraphe, on considère un ouvert $\mathcal{U}$ non vide de $\mathbb{R}^n$.

### 3.1 Dérivées partielles secondes

Définition 3.1 *Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}$ un point de $\mathcal{U}$.*
*Étant donnés deux entiers $i, j \in [\![1, n]\!]$, on dit que $f$ au point $\mathrm{A}$ admet une **dérivée partielle seconde** par rapport aux variables $x_j$ puis $x_i$ si elle admet au voisinage de $\mathrm{A}$ une dérivée partielle $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ qui admet à son tour une dérivée partielle par rapport à la variable $x_i$ au point $\mathrm{A}$. On la note alors*

$$\partial^2_{i,j} f(\mathrm{A}) = \partial_i(\partial_j f)(\mathrm{A}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{A}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathrm{A})$$

*et, lorsque $i = j$,*

$$\partial^2_i f(\mathrm{A}) = \partial_i(\partial_i f)(\mathrm{A}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathrm{A}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathrm{A}).$$

*Exemple 3.2* Dérivées partielles secondes de la fonction $(x, y) \longmapsto xy^2 + \mathbf{e}^{x^2}$.

*Remarque 3.3* Comme au premier ordre, on dit que $f$ admet une dérivée partielle seconde $\partial^2_{i,j} f$ sur $\mathcal{U}$ si elle en admet une en chaque point de $\mathcal{U}$. On considère alors la dérivée partielle seconde $\partial^2_{i,j} f : \mathrm{A} \in \mathcal{U} \longmapsto \partial^2_{i,j} f(\mathrm{A})$ comme une fonction définie sur $\mathcal{U}$.

### 3.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Définition 3.4 *Une fonction $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **de classe** $\mathscr{C}^2$ si toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.*

Proposition 3.5 *Soient $f, g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.*
*(i) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ ;*
*(ii) la fonction $fg$ est de classe $\mathscr{C}^2$ ;*
*(iii) si $f$ ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, alors $1/f$ est de classe $\mathscr{C}^2$.*

Corollaire 3.6 *Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^2$.*

Proposition 3.7 *Soient deux fonctions $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle $\mathrm{I}$ de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(\mathcal{U}) \subset \mathrm{I}$.*
*La fonction $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{U}$.*

On admet le théorème suivant.

Théorème 3.8 (Schwarz) *Pour une fonction $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on a :*

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f.$$

Définition 3.9 *Soient $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $\mathrm{A}$ un point de $\mathcal{U}$.*
*On appelle **hessienne** de $f$ en $\mathrm{A}$, et on note $\nabla^2 f(\mathrm{A})$ ou $\nabla^2 f_{\mathrm{A}}$, la matrice carrée*

$$\nabla^2 f(\mathrm{A}) = \left(\partial^2_{i,j} f(\mathrm{A})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}).$$

*Remarques 3.10* • Il résulte du théorème de Schwarz que la hessienne de $f$ en $\mathrm{A}$ est une matrice symétrique. On note souvent $q_{\mathrm{A}}$ (la notation est imparfaite puisqu'elle ne fait pas intervenir $f$) la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associée : en identifiant vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et matrices colonnes de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\forall X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(X) = {}^tX\nabla^2 f(A)X = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial^2_{i,j} f(A) x_i x_j.$$

- Dans le cas $n = 2$, on utilise traditionnellement les notations suivantes, attribuées à Monge :

$$r = \partial^2_{1,1} f(A), \quad s = \partial^2_{1,2} f(A) \quad \text{et} \quad t = \partial^2_{2,2} f(A).$$

Ainsi

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad q_A(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

*Exemple 3.11* Déterminer la matrice hessienne de la fonction $X \in \mathbb{R}^n \longmapsto \|X\|^2$.

### 3.3 Étude locale d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$

Dans toute la section, $f$ désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ et à valeurs réelles. Pour tout $A \in \mathcal{U}$, on note $q_A$ la forme quadratique canoniquement associée à la hessienne $\nabla^2 f(A)$.

Proposition 3.12 *Soient $A \in \mathcal{U}$ et $V$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.*
*La fonction d'une variable réelle $t \longmapsto f(A + tV)$ admet une dérivée seconde à l'origine appelée* ***dérivée directionnelle seconde*** *de $f$ en $A$ dans la direction $V$, notée $\partial^2_V f(A)$ et égale à $\partial^2_V f(A) = q_A(V)$.*

Théorème 3.13 *Soit $A \in \mathcal{U}$ donné.*
*Il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{U}$ voisin de $A$ :*

$$f(X) = f(A) + \langle \nabla f(A), X - A \rangle + \frac{1}{2} q_A(X - A) + \|X - A\|^2 \varepsilon(X - A)$$

*et :*

$$\lim_{H \to 0} \varepsilon(H) = 0.$$

*Remarque 3.14* On dit que $f$ admet un **développement limité** du second ordre en $A$ et on note :

$$\begin{aligned} f(X) &= f(A) + \langle \nabla f(A), X - A \rangle + \frac{1}{2} q_A(X - A) + o(\|X - A\|^2) \\ &= f(A) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(A)(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial^2_{i,j} f(A)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + o(\|X - A\|^2) \end{aligned}, \quad X \to A$$

ou, de façon équivalente :

$$\begin{aligned} f(A + H) &= f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_A(H) + o(\|H\|^2) \\ &= f(A) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(A) h_j + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial^2_{i,j} f(A) h_i h_j + o(\|H\|^2) \end{aligned}, \quad H \to 0.$$

*Exemple 3.15* Développement limité à l'ordre 2 en $A = (0, 1)$ de la fonction de l'exemple 3.2.