Chapitre 12 :

ESPACES EUCLIDIENS

Définition 0.1 *On appelle* ***espace euclidien*** *tout espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.*

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Bases orthonormales

On commence par rappeler quelques points du chapitre précédent.

Définition 1.1 *On appelle* ***base orthonormale*** *(ou* ***base orthonormée****) de* E *toute famille orthonormale qui est une base de* E*, i.e. toute base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* E *telle que :*

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} .$$

Exemples 1.2 La base canonique de $\mathbb{R}^n$ en est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique. En particulier, la famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ donné, les vecteurs $\vec{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\vec{v}_\theta = \vec{u}_{\theta+\pi/2} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ forment également une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Représenter ces vecteurs sur une figure.

Remarque 1.3 Si une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale, elle est automatiquement libre et comme elle est formée de $n = \dim \mathrm{E}$ vecteurs, c'est une base de E, orthonormale par construction.

1.1 Expression du produit scalaire

Si $\underline{e}$ désigne une base de E dans laquelle le produit scalaire est représenté (en tant que forme bilinéaire) par une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, alors le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E s'exprime sous la forme

$$\langle x, y \rangle = {}^t\mathrm{XAY} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} x_i y_j$$

où $\mathrm{X} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ sont les colonnes des coordonnées de x et y en base $\underline{e}$.

Lemme 1.4 *Une base* $\underline{e}$ *de* E *est orthonormale si, et seulement si, le produit scalaire est représenté dans cette base par la matrice* I_n*.*

Le produit scalaire s'exprime donc de façon particulièrement simple en base orthonormale :

Théorème 1.5 (Expression du produit scalaire et de la norme en base orthonomale) *On suppose* E *rapporté à une base* $\underline{e}$ $\boxed{\text{orthonormale}}$.
Soient x et y deux vecteurs de E*, ainsi que* $\mathrm{X} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Y} = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$ *les colonnes de leurs coordonnées en base* $\underline{e}$*.*
On a :

$$\langle x, y \rangle = {}^t\mathrm{XY} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \qquad et \qquad \|x\|^2 = {}^t\mathrm{XX} = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Corollaire 1.6 (Coordonnées d'un vecteur en base orthonormale) *On suppose* E *rapporté à une base* $\underline{e}$ $\boxed{\text{orthonormale}}$.
Soit x un vecteur de E*. Ses coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ en base $\underline{e}$ sont données par :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad x_i = \langle e_i, x \rangle .$$

Remarque 1.7 En d'autres termes, si $\underline{e}$ est une base orthonormale de E, alors :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \, e_i$$

et les formules du théorème 1.5 deviennent :

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \langle e_i, y \rangle, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle^2.$$

Remarque 1.8 Soient u un endomorphisme de E et $\underline{e}$ une base orthonormale de E.
Les coefficients $a_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, de la matrice A représentant u en base $\underline{e}$ dont donnés par :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle.$$

1.2 Existence de bases orthonormales

THÉORÈME 1.9 *Tout espace euclidien admet (au moins) une base orthonormale.*

PROPOSITION 1.10 *Soit $\underline{e}$ une base orthonormale de* E*, $\underline{e}'$ une autre base de* E *et* P *la matrice de passage de $\underline{e}$ à $\underline{e}'$.*
La base $\underline{e}'$ est orthonormale si, et seulement si, la matrice P *est orthogonale i.e. vérifie $\mathrm{P}^{-1} = {}^t\mathrm{P}$ (cf. définition suivante).*

PROPOSITION-DÉFINITION 1.11 *Une matrice $\mathrm{P} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* ***orthogonale*** *si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*
(i) ${}^t\mathrm{P}\mathrm{P} = \mathrm{P}{}^t\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$ *;*
(ii) la matrice P *est inversible et* $\mathrm{P}^{-1} = {}^t\mathrm{P}$ *;*
(iii) les colonnes de P *forment une base orthonormale de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ euclidien canonique.*

1.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

On renvoie aux TD pour l'énoncé du problème et les détails de sa résolution.

THÉORÈME 1.12 (ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT) *Soit $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_r)$ une famille libre de* E*.*
Il existe une famille orthonormale $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_r)$ de vecteurs de E *telle que :*

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \qquad v_k \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k). \tag{1.1}$$

Remarques 1.13
- On trouve parfois la condition (1.1) sous la forme
$$\forall k \in [\![1, r]\!], \qquad \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k).$$
Elle signifie que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est une base orthonormale du sous-espace $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.
- L'application du procédé de Gram-Schmidt à une base de E permet d'en construire une base orthonormale.
- La famille $(v_1, \ldots, v_r)$ est unique si l'on impose de plus $\langle v_k, u_k \rangle > 0$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$. Elle s'obtient en normalisant les vecteurs de la famille orthogonale $(w_1, \ldots, w_r)$ définie par $w_1 = u_1$ et
$$\forall k \in [\![1, r-1]\!], \quad w_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i, u_{k+1} \rangle}{\|w_i\|^2} w_i,$$
c'est-à-dire en posant $v_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.

2. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

2.1 Théorème fondamental

THÉORÈME 2.1 *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E.
Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ *est supplémentaire de* E *:*

$$E = F \oplus^\perp F^\perp.$$

On dit dans ces conditions que $F^\perp$ *est le* ***supplémentaire orthogonal*** *de* F.

COROLLAIRE 2.2 *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E. *On a :*

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F.$$

COROLLAIRE 2.3 *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E. *On a :*

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

Remarque 2.4 Comme on l'a déjà signalé dans le chapitre précédent, les résultats de cette section sont faux lorsque E n'est pas de dimension finie. Des contre-exemples seront étudiés en travaux dirigés.

2.2 Premières conséquences

PROPOSITION 2.5 *(i) Toute famille libre orthogonale peut être complétée en une base orthogonale de* E.
(ii) Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale de E.

PROPOSITION 2.6 *On suppose* E *rapporté à une base orthonormale* $\underline{e}$.
Soit H *un hyperplan de* E *d'équation*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

en base $\underline{e}$ *(où* $a_1, \ldots, a_n$ *sont des réels non tous nuls donnés).*
L'orthogonal de H *est la droite dirigée par le vecteur a de coordonnées* $(a_1, \ldots, a_n)$ *en base* $\underline{e}$.

2.3 Projecteurs orthogonaux

On se donne dans cette section un sous-espace vectoriel F de E. D'après le théorème 2.1, les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E, ce qui justifie la définition suivante.

DÉFINITION 2.7 *On appelle* **projection orthogonale** *sur* F, *et on note* p_F, *la projection sur* F *parallèlement à* $F^\perp$.

Remarques 2.8
- Le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur $x \in E$ sur le sous-espace F est donc *caractérisé* par les conditions :

$$\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \perp F \end{cases}.$$

- Une projection p de E est une projection orthogonale si, et seulement si, les sous-espaces $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont orthogonaux.
- Les projecteurs p_F et $p_{F^\perp}$ sont associés, ce qui explique que $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{id}_E$.

PROPOSITION 2.9 *Soit* $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_r)$ *une base orthonormale de* F.
On a :

$$\forall x \in E, \qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle v_i, x\rangle\, v_i.$$

Exemples 2.10 • Soit D une droite vectorielle de E, dirigée par un vecteur $a \in E \setminus \{0\}$. Exprimer le projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur D.

• Soit H un hyperplan de E ; d'après le corollaire 2.3, son orthogonal est une droite $D = H^{\perp}$ dirigée par un vecteur n. Exprimer le projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur H.

COROLLAIRE 2.11 *On suppose l'espace euclidien* E *rapporté à une base orthonormale* $\underline{e}$. *Soit* $\underline{v} = (v_1, \dots, v_r)$ *une base orthonormale de* F. *La projection orthogonale* p_F *sur* F *est représentée en base* $\underline{e}$ *par la matrice*

$$P_F = \sum_{i=1}^{r} V_i {}^t V_i$$

où $V_1, \dots, V_r$ *sont les colonnes des coordonnées des vecteurs* $v_1, \dots, v_r$ *en base* $\underline{e}$.

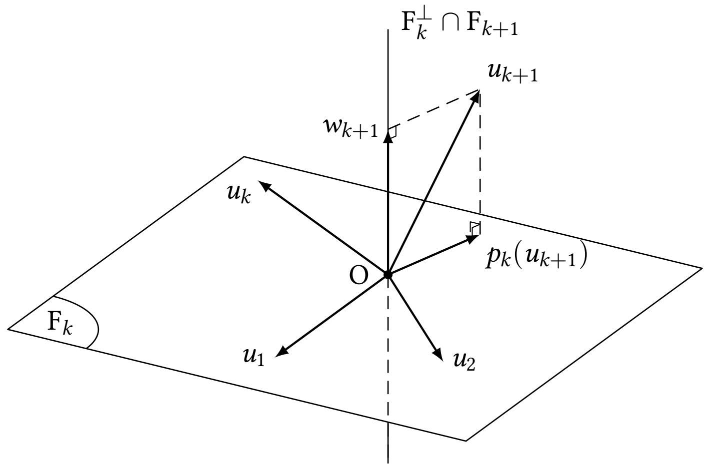
Remarque 2.12 Si l'on dispose seulement d'une base orthogonale $(e_1, \dots, e_r)$ de F, alors la formule de la proposition 2.9 s'adapte facilement :

$$\forall x \in E, \qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle e_i, x\rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

On reconnaît une formule apparue dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (cf. TD) appliqué à une famille libre $(u_1, \dots, u_r)$ pour obtenir une base orthogonale $(w_1, \dots, w_r)$ de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r)$. Après la k-ième étape, le vecteur w_{k+1} est défini par

$$w_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w_i, u_{k+1}\rangle}{\|w_i\|^2} w_i = u_{k+1} - p_k(u_{k+1})$$

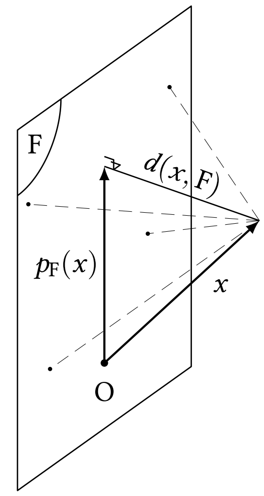
où $p_k(u_{k+1})$ est le projeté orthogonal de u_{k+1} sur $F_k = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ car $(w_1, \dots, w_k)$ constitue par hypothèse de récurrence une base orthogonale de F_k.
La technique consiste donc à « redresser » le vecteur u_{k+1} : celui-ci se décompose en effet sous la forme $u_{k+1} = p_k(u_{k+1}) + w_{k+1}$ avec $p_k(u_{k+1}) \in F_k$ et $w_{k+1} \perp F_k$.



3. Application aux problèmes de minimisation

3.1 Distance à un sous-espace vectoriel dans un espace euclidien

Soit F un sous-espace vectoriel de E.



PROPOSITION 3.1 *Soit $x \in E$.*
On a :

$$\forall y \in F, \qquad \|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - y\|,$$

avec égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.
En d'autres termes, le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F est l'unique vecteur de F minimisant la distance à x.

Remarque 3.2 Avec les notations précédentes, on dit que $p_F(x)$ est la meilleure approximation de x dans F. On appelle *distance* de x à F le réel

$$d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

COROLLAIRE 3.3 *Pour tout $x \in E$, on a :*

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2 \geqslant \|p_F(x)\|^2.$$

Exemples 3.4 Exprimer la distance d'un vecteur $x \in E$ à une droite D dirigée par un vecteur $a \neq 0$ puis à un hyperplan H de vecteur normal $n \neq 0$.

3.2 Pseudo-solutions d'un système linéaire

On munit $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

THÉORÈME 3.5 *Soient $n \geqslant p$ deux entiers strictement positifs, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
Il existe un et un seul vecteur $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|AX - B\|$. Ce vecteur est l'unique solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$.

Remarque 3.6 L'unique vecteur X du théorème précédent est ce qui se rapproche le plus, au sens des moindres carrés (i.e. de la norme euclidienne) d'une solution du système linéaire $AX = B$; on parle de *pseudo-solution.*

On renvoie au TD pour des explications plus détaillées, la démonstration et un exemple d'application.