

Chapitre 10 :

LOIS CONTINUES CLASSIQUES

1	Loi uniforme	2
1.1	Description et transformations affines	2
1.2	Moments	2
2	Loi exponentielle	3
2.1	Description et transformations linéaires	3
2.2	Moments	3
2.3	Caractérisation par l'absence de mémoire	3
3	Loi gamma	4
3.1	Description	4
3.2	Moments	4
3.3	Stabilité	4
4	Loi normale ou gaussienne	5
4.1	Description et transformations affines	5
4.2	Étude de la loi normale centrée réduite	5
4.3	Moments	6
4.4	Stabilité	6

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité.

1. Loi uniforme

Dans tout ce paragraphe, $a < b$ désignent deux réels.

1.1 Description et transformations affines

DÉFINITION 1.1 On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, si X admet pour densité la fonction

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

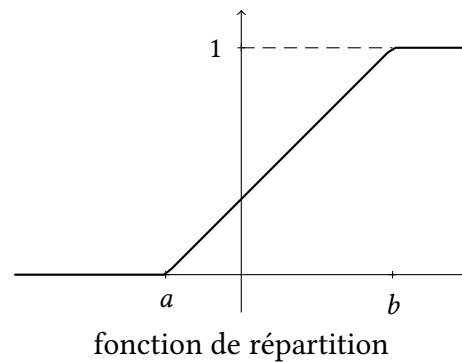
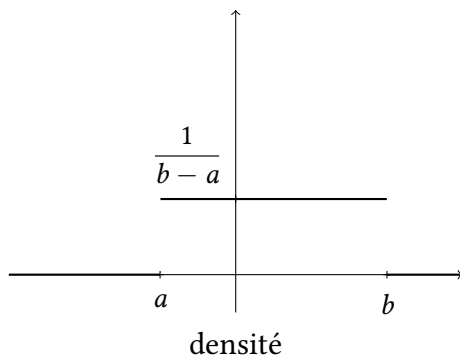
Remarque 1.2 La loi précédente est qualifiée d'*uniforme* car si X suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$, la probabilité que X appartienne à un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ donné ($\alpha < \beta$) ne dépend que de la longueur $\beta - \alpha$ de celui-ci.

PROPOSITION 1.3 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([a, b])$.

La variable aléatoire X admet pour fonction de répartition

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} .$$

Ci-dessous les représentations de la densité et de la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$.



PROPOSITION 1.4 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle.

Si X suit une loi $\mathcal{U}([a, b])$ et $\alpha > 0$, alors $\alpha X + \beta$ suit une loi $\mathcal{U}([\alpha a + \beta, \alpha b + \beta])$.

1.2 Moments

PROPOSITION 1.5 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([a, b])$.

On a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} .$$

2. Loi exponentielle

2.1 Description et transformations linéaires

DÉFINITION 2.1 On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$, et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ si elle admet pour densité la fonction

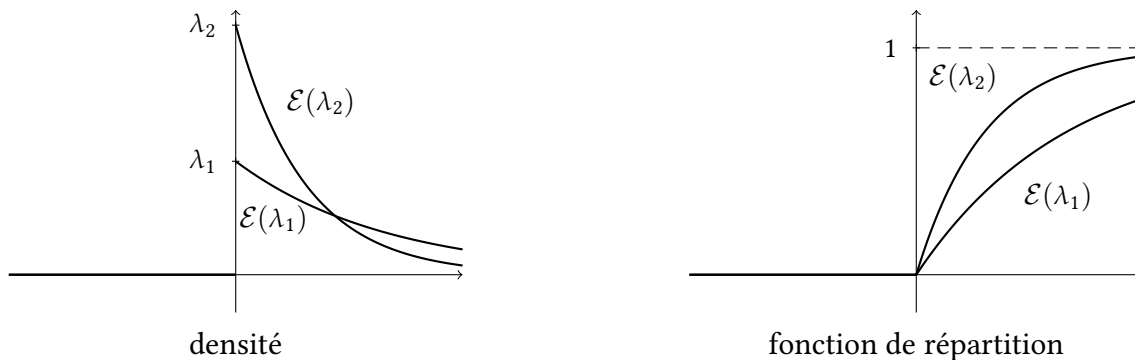
$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

PROPOSITION 2.2 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

La variable aléatoire X admet pour fonction de répartition

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Ci-dessous les représentations de la densité et de la fonction de répartition de deux lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$ avec $\lambda_1 < \lambda_2$. On constate que plus λ est grand, plus la variable est concentrée au voisinage de 0 (à droite).



PROPOSITION 2.3 Soient $\lambda > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle.

Si X suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\alpha > 0$, alors αX suit une loi $\mathcal{E}(\lambda/\alpha)$.

2.2 Moments

PROPOSITION 2.4 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

On a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2} .$$

2.3 Caractérisation par l'absence de mémoire

THÉORÈME 2.5 Une variable aléatoire réelle X suit une loi exponentielle si, et seulement si, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X > x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}_{[X > y]}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x). \quad (2.1)$$

Remarque 2.6 On interprète la condition (2.1) en disant que X suit une loi sans mémoire.

3. Loi gamma

3.1 Description

LEMME 3.1 Pour $\nu > 0$, la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

est une densité de probabilité.

DÉFINITION 3.2 Soient X une variable aléatoire réelle et $\nu > 0$.

On dit que X suit une **loi γ** de paramètre ν , et l'on note $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$, si elle admet la fonction (3.1) pour densité.

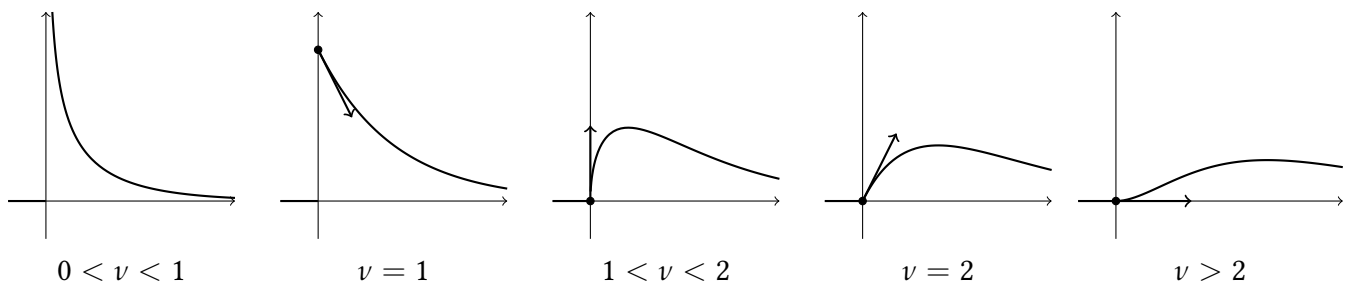
Remarques 3.3 • Pour $b, \nu > 0$ et X une variable aléatoire de loi $\gamma(\nu)$, la variable bX est à densité donnée par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)b^\nu} e^{-x/b} = \frac{1}{b\Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{b}\right)^{\nu-1} e^{-x/b} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Cette loi (hors-programme) est notée $\Gamma(b, \nu)$ et le réel b est appelé paramètre d'échelle. La loi $\gamma(\nu)$ est parfois appelée loi γ -standard par opposition aux lois Γ générales.

- La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ coïncide avec la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, 1)$. En particulier, la loi $\mathcal{E}(1)$ coïncide avec la loi $\gamma(1)$.

Ci-dessous la représentation graphique de la densité de la loi $\gamma(\nu)$ pour différentes valeurs de ν .



3.2 Moments

PROPOSITION 3.4 Soit X une variable aléatoire de loi $\gamma(\nu)$, $\nu > 0$.

On a :

$$\mathbb{E}(X) = \nu \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \nu.$$

3.3 Stabilité

THÉORÈME 3.5 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$ avec $\nu_1, \nu_2 > 0$.

Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$.

COROLLAIRE 3.6 Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

(i) Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit une loi $\gamma(\nu_i)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \dots + \nu_n)$.

(ii) Si X_1, \dots, X_n suivent toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\gamma(n)$.

Exemple 3.7 Déterminer une densité de $X_1 + \dots + X_n$ lorsque X_1, \dots, X_n sont des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

4. Loi normale ou gaussienne

4.1 Description et transformations affines

LEMME 4.1 Pour $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.1)$$

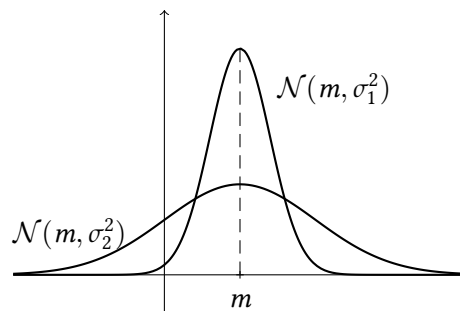
est une densité de probabilité.

DÉFINITION 4.2 Soit $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une **loi normale** (ou **loi gaussienne**) de paramètres (m, σ^2) , et l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, si X admet pour densité la fonction (4.1).

Remarque 4.3 Le programme définit la notation $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ mais on rencontre aussi la notation $\mathcal{N}(m, \sigma)$ pour désigner la loi précédente.

Ci-dessous la superposition des densités de deux lois normales $\mathcal{N}(m, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m, \sigma_2^2)$ avec $\sigma_1 < \sigma_2$:



PROPOSITION 4.4 Soient $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle. Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\alpha X + \beta$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\alpha m + \beta, \alpha^2 \sigma^2)$.

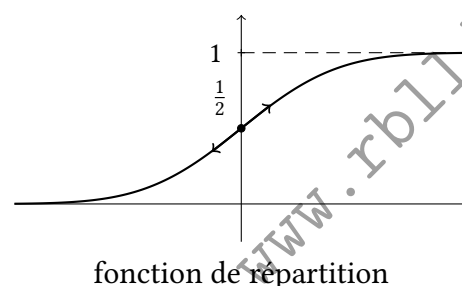
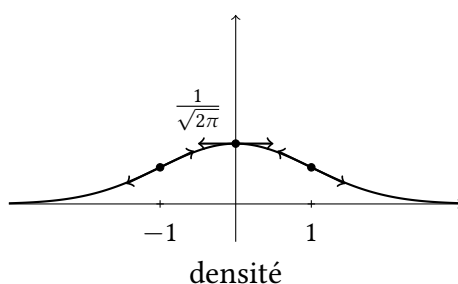
4.2 Étude de la loi normale centrée réduite

La loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ est appelée **loi normale centrée réduite** (car elle est centrée réduite comme on le verra plus tard...). Elle a pour densité la fonction

$$f_{0,1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

PROPOSITION 4.5 La fonction $f_{0,1}$ est paire, croissante sur \mathbb{R}_- , décroissante sur \mathbb{R}_+ . Elle est convexe sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ et concave sur l'intervalle $[-1, 1]$. Sa courbe représentative présente une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Ci-dessous les représentations graphiques de la densité f et de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$:



On note Φ la fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

C'est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

PROPOSITION 4.6 On a $\Phi(0) = 1/2$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Remarque 4.7 La propriété précédente signifie que la courbe représentative de Φ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, 1/2)$. Ce centre de symétrie est aussi point d'inflexion de la courbe, la fonction Φ étant convexe sur \mathbb{R}_- et concave sur \mathbb{R}_+ .

4.3 Moments

THÉORÈME 4.8 Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $\sigma > 0$.

On a :

$$\mathbb{E}(X) = m, \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

4.4 Stabilité

THÉORÈME 4.9 Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit une loi normale $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$.