Chapitre 8 :

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES, VARIABLES À DENSITÉ : RÉVISIONS ET COMPLÉMENTS

Après avoir étudié jusqu'ici les variables aléatoires réelles discrètes, on s'intéresse dans ce chapitre à une autre classe de variables aléatoires réelles : les variables *à densité*. Pour une telle variable X, on verra qu'on a toujours $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour $x \in X(\Omega)$, et l'étude des événements $[X = x]$, entreprise dans le cas discret, se révèle donc insuffisante pour comprendre le comportement de la variable X du point de vue probabiliste. Avant de définir les variables à densité, on reformule donc certaines propriétés des variables discrètes en des termes généralisables à des variables aléatoires réelles quelconques, ce qui conduit à dégager la notion de fonction de répartition, qui permet par exemple d'exprimer des propriétés d'indépendance. La suite du chapitre est consacrée aux variables à densité.

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilités.

1. Généralités sur les variables aléatoires réelles

1.1 Généralités

La plupart des résultats de cette section sont admis.

Définition 1.1 *On appelle* ***variable aléatoire réelle*** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *toute application* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, l'ensemble* $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$ *appartienne à* $\mathcal{A}$.

Exemple 1.2 Les variables aléatoires réelles discrètes sont des variables aléatoires.

Proposition 1.3 *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathcal{A})$*, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $\lambda X + Y$*,* XY*,* $\inf(X, Y)$ *et* $\sup(X, Y)$ *sont des variables aléatoires.*

La suite de cette section est plus théorique et peut être laissée de côté en première lecture.

Définition 1.4 *On appelle* ***tribu borélienne****, et on note* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, la tribu de* $\mathbb{R}$ *engendrée par les intervalles de la forme* $]-\infty, x]$*,* $x \in \mathbb{R}$*, i.e. la plus petite tribu (pour l'inclusion) contenant ces intervalles. Les éléments de cette tribu sont appelés* ***boréliens****.*

Exemple 1.5 Les intervalles de $\mathbb{R}$ en sont des boréliens, ainsi que les unions finies ou dénombrables d'intervalles.

Dans la suite de cette section, on se donne une variable aléatoire réelle X.

Proposition 1.6 *Pour tout borélien* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, l'ensemble* $[X \in B] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ *est un événement :* $[X \in B] \in \mathcal{A}$.

Définition 1.7 *On appelle* ***loi*** *de la variable aléatoire* X *la fonction*

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in B) \end{array}.$$

Proposition 1.8 *Si la variable* X *est discrète, alors sa loi est caractérisée par la fonction*

$$x \in X(\Omega) \longmapsto \mathbb{P}(X = x).$$

Définition 1.9 *On appelle* ***tribu associée*** *à la variable aléatoire* X*, et l'on note* $\mathcal{A}_X$*, la tribu sur* Ω *engendrée par les ensembles* $[X \leqslant x]$*,* $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.10 La tribu $\mathcal{A}_X$ est moins fine que $\mathcal{A}$: on a l'inclusion $\mathcal{A}_X \subset \mathcal{A}$. Elle est composée des événements qui « peuvent être définis à partir de X ». Plus précisément, elle est constituée des événements de la forme $[X \in B]$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.2 Fonction de répartition

Dans toute cette section, X désigne une variable aléatoire réelle.

Définition 1.11 *On appelle* ***fonction de répartition*** *de la variable aléatoire* X, *et l'on note* F_X, *la fonction* $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ *définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Proposition 1.12 *La fonction de répartition* F_X *de* X *vérifie les propriétés suivantes :*
(i) la fonction F_X *est croissante ;*
(ii) la fonction F_X *est continue à droite en tout point de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} F_X(y) = F_X(x)\,;$$

(iii) la fonction F_X *présente les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

Remarque 1.13 Réciproquement, on admettra que toute fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) de la proposition précédente est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Proposition 1.14 *(i) Pour tous* $a < b \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \in \,]-\infty, b]) = F_X(b) && \mathbb{P}(X \in \,]-\infty, b[) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} F_X(x) \\
&\mathbb{P}(X \in [a, +\infty[) = 1 - \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} F_X(x) && \mathbb{P}(X \in \,]a, +\infty[) = 1 - F_X(a) \\
&\mathbb{P}(X \in \,]a, b]) = F_X(b) - F_X(a) && \mathbb{P}(X \in [a, b]) = F_X(b) - \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} F_X(x) \\
&\mathbb{P}(X \in [a, b[) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} F_X(x) - \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} F_X(x) && \mathbb{P}(X \in \,]a, b[) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} F_X(x) - F_X(a).
\end{aligned}$$

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} F_X(y).$$

La fonction F_X *est continue en* x *si, et seulement si,* $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Remarque 1.15 On admettra plus généralement que la fonction de répartition de X *caractérise* la loi de X.

Proposition 1.16 *Si* X *est une variable aléatoire discrète alors, en notant* $(x_i)_{i \in I}$ *une énumération de* $X(\Omega)$, *la fonction de répartition de* X *est une fonction en escalier donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{i \in I : \\ x_i \leqslant x}} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemple 1.17 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète suivant une loi de Bernoulli.

Exemple 1.18 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète sur $[\![1, n]\!]$ suivant une loi uniforme.

1.3 Vecteurs aléatoires

Définition 1.19 *On appelle* ***vecteur aléatoire*** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *toute application de la forme*

$$V : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega \longmapsto \big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big) \end{array}$$

où $X_1, \dots, X_n$ *sont des variables aléatoires réelles.*

On ne définira pas ici la loi d'un vecteur aléatoire $V = (X_1, \ldots, X_n)$, on admettra simplement qu'elle est caractérisée par la fonction de répartition

$$F_{(X_1,\ldots,X_n)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x_i]\right) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n) \end{array}.$$

Lorsque les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont discrètes, la loi du vecteur $V = (X_1, \ldots, X_n)$ est également caractérisée par l'application

$$(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \longmapsto \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n).$$

Proposition 1.20 *Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires de même loi.*
Pour toute fonction continue $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, les applications $g(X_1, \ldots, X_n)$ et $g(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont des variables aléatoires réelles de même loi.

1.4 Variables aléatoires indépendantes

Définition 1.21 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.*
*On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, les événements $[X \leqslant x]$ et $[Y \leqslant y]$ sont indépendants :*

$$\mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\,\mathbb{P}(Y \leqslant y).$$

Remarque 1.22 Dans le cas de variables aléatoires discrètes, la définition précédente équivaut à celle donnée dans le chapitre précédent.

Définition 1.23 *Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires.*
*On dit que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leqslant x_n).$$

Remarques 1.24
- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille de $(X_1, \ldots, X_n)$ est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Ainsi les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour toute famille $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, les événements $[X_1 \leqslant x_1], \ldots, [X_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants.
- En particulier, si les variables $X_1, \ldots, X_n$, sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux-à-deux indépendantes (i.e. pour tous $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes), mais la réciproque est fausse.
- La condition d'indépendance mutuelle s'écrit :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \quad F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

Proposition 1.25 *Pour des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes ;
(ii) pour tous intervalles $J_1, \ldots, J_n$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in J_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in J_i)\,;$$

(iii) les tribus $\mathcal{A}_{X_1}, \ldots, \mathcal{A}_{X_n}$ sont mutuellement indépendantes i.e. pour tous $A_1 \in \mathcal{A}_{X_1}, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_{X_n}$, les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 1.26 (Lemme des coalitions) *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles et p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.*
Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors, pour toutes fonctions continues $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

DÉFINITION 1.27 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires.*
On dit que les variables aléatoires X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, *sont mutuellement indépendantes si, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *les variables aléatoires* $X_1, \dots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes.*

2. Variables aléatoires à densité

Dans tout ce paragraphe, on se donne une variable aléatoire X, dont on note F_X la fonction de répartition.

2.1 Définition

DÉFINITION 2.1 *(i) On dit que* X *est une* ***variable aléatoire à densité*** *si sa fonction de répartition* F_X *vérifie les deux conditions :*
- F_X *est continue sur* $\mathbb{R}$ *;*
- F_X *et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

(ii) Dans ces conditions, on appelle ***densité*** *de* X *toute fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les deux conditions suivantes :*
- f *est positive ou nulle sur* $\mathbb{R}$ *;*
- $f = F_X'$ *sur* $\mathbb{R}$*, sauf peut-être en un nombre fini de points.*

PROPOSITION 2.2 *On suppose que* X *est une variable à densité.*

(i) X *admet une densité* f_X.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Remarques 2.3 • Pour une variable X à densité, on a donc existence mais pas unicité de la densité. Néanmoins, on note souvent f_X *une* densité de X. Les autres densités de X sont alors les fonctions positives ne différant de f_X qu'en un nombre fini de points.

• La condition de positivité sur f est automatiquement satisfaite en tout point $x \in \mathbb{R}$ en lequel $f(x) = F_X'(x)$, donc sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, puisque F_X est croissante.

THÉORÈME 2.4 *On suppose la variable* X *à densité et on note* f_X *l'une de ses densités.*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *en lequel* $f_X(x) = F_X'(x) \neq 0$, *on a :*

$$\mathbb{P}(x < X \leqslant x + h) \sim f_X(x) \cdot h, \qquad h \to 0.$$

Remarque 2.5 Pour $x \in \mathbb{R}$ et h assez petit, $f_X(x) \cdot h$ représente donc a peu près la probabilité que X soit proche de x à la précision h. Ainsi, plus la densité au point x est élevée, plus la probabilité d'obtenir une valeur proche de x est forte.

Exemples 2.6 Le chapitre suivant sera consacré aux lois à densité classiques. D'ores et déjà, voici deux exemples incontournables à connaître !

• On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[0, 1]$ si sa fonction de répartition est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Une telle variable aléatoire admet alors (entre autres) pour densité la fonction f_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Plus généralement, définir la loi uniforme sur un segment $[a, b]$, $a < b$ réels.

- On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction f_X définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \mathbf{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$
Déterminer sa fonction de répartition.

Théorème 2.7 *On suppose la variable X à densité et on note f_X l'une de ses densités.*

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a convergence de l'intégrale ci-dessous et :
$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$
(ii) Plus généralement, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a convergence de l'intégrale ci-dessous et :
$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.8 Du théorème précédent et du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, on déduit qu'en tout point x_0 de continuité de f_X, la fonction F_X est dérivable, de dérivée $F_X'(x_0) = f_X(x_0)$.

Corollaire 2.9 *Si f_X est la densité d'une variable aléatoire X, alors on a convergence de l'intégrale ci-dessous et :*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Remarque 2.10 On admettra réciproquement que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, positive et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (avec convergence de l'intégrale), alors c'est la densité d'une variable aléatoire.

Exemples 2.11 • Déterminer « la » densité d'une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
et observer qu'elle n'est pas bornée.

- Une variable aléatoire discrète n'est pas à densité.
- Il existe des variables aléatoires réelles qui ne sont ni discrètes, ni à densité ; par exemple, une variable X de fonction de répartition F_X donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Proposition 2.12 *On suppose la variable X à densité et on note f_X l'une de ses densités. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
La variable X prend presque sûrement ses valeurs dans I si, et seulement si, la densité f_X est nulle en dehors de I, sauf peut-être en un nombre fini de points.

2.2 Premier théorème de transfert

On suppose dans cette section que la variable aléatoire X est à densité et on note f_X une densité de X.

Exemple 2.13 Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, montrer que $Y = aX + b$ est également une variable à densité et en déterminer une densité en fonction de f_X.

Exemple 2.14 Montrer que $\mathrm{T} = \mathbf{e}^{\mathrm{X}}$ est également une variable à densité et en déterminer une densité en fonction de f_{X}.

Plus généralement, on dispose du théorème suivant, mais en pratique on raisonnera toujours sur le cas particulier proposé comme dans les exemples précédents.

Théorème 2.15 *Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x.*
(i) La fonction φ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathrm{I} = \varphi(\mathbb{R})$.
(ii) La variable aléatoire $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$ est à densité. La fonction f_{Y}, nulle en dehors de I et définie sur I (lorsque la formule a un sens) par
$$\forall y \in \mathrm{I}, \quad f_{\mathrm{Y}}(y) = f_{\mathrm{X}}\big(\varphi^{-1}(y)\big)(\varphi^{-1})'(y),$$
est une densité de Y.

Remarques 2.16 • Soient $y \in \mathrm{I}$ et $x = \varphi^{-1}(y)$. La fonction φ^{-1} n'est pas dérivable en y lorsque $\varphi'(x) = 0$, mais ces points sont en nombre fini par hypothèse. La formule proposée fait donc sens pour tout $y \in \mathrm{I}$, sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de y, ce qui n'est pas problématique dans la définition d'une densité.
• Le théorème est encore valable lorsque φ n'est définie que sur un intervalle ouvert contenant $\mathrm{X}(\Omega)$.

Exemple 2.17 Montrer que $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^2$ est une variable à densité ; en déterminer une densité en fonction de f_{X}.

3. Moments d'une variable aléatoire à densité

Dans tout le paragraphe, X est une variable aléatoire à densité dont on note f_{X} une densité.

3.1 Moments

Définition 3.1 *On appelle **moment** d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, et l'on note $\mathbb{M}_n(\mathrm{X})$, le réel*
$$\mathbb{M}_n(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t$$
si cette intégrale est convergente.

Remarques 3.2 • La définition est correcte dans le sens où elle ne dépend pas du choix de la densité f_{X}.
• Comme la fonction intégrée garde un signe constant au voisinage de chaque borne de généralisation, la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à sa convergence absolue.
• La fonction f_{X} est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points. Par comparaison à l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t$, on montre que les seules bornes de généralisation de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t$ où la convergence n'est pas automatique sont $\pm\infty$.
• La définition est à mettre en parallèle de celle du moment d'ordre n d'une variable aléatoire discrète X :
$$\mathbb{M}_n(\mathrm{X}) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x^n\, \mathbb{P}(\mathrm{X} = x).$$

3.2 Espérance

Définition 3.3 *On appelle **espérance** de X, et l'on note $\mathbb{E}(\mathrm{X})$, son moment d'ordre 1 lorsqu'il existe :*
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathbb{M}_1(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t,$$
i.e. lorsque l'intégrale précédente converge.

Exemples 3.4 Étudier l'existence d'une espérance pour X et le cas échéant la calculer dans les cas suivants :
(i) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
(ii) X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
(iii) X suit la loi de Cauchy, i.e. a pour densité

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

PROPOSITION 3.5 *Si* X *est presque sûrement bornée (i.e. s'il existe un intervalle borné* I *tel que* $\mathbb{P}(X \in I) = 1$*), alors* X *admet une espérance.*

Remarque 3.6 Attention à ne pas confondre les énoncés « X est bornée » et « f_X est bornée » : il n'existe aucun lien logique entre eux !

Exemple 3.7 Si X admet une densité f_X paire, alors elle admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f_X(t)\,dt$ converge, et dans ces conditions $\mathbb{E}(X) = 0$.

PROPOSITION 3.8 (POSITIVITÉ DE L'ESPÉRANCE) *On suppose que* X *admet une espérance.*
Si $X \geqslant 0$ *presque sûrement (i.e.* $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$*), alors* $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

THÉORÈME 3.9 (SECOND THÉORÈME DE TRANSFERT) *On suppose que* X *prend ses valeurs dans un intervalle* I *d'extrémités* $a \leqslant b \in \overline{\mathbb{R}}$. *Soit* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* I*, sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
La fonction $Y = \varphi(X)$ *est une variable aléatoire. Elle admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale ci-dessous converge absolument, avec :*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,dt.$$

Remarque 3.10 Conformément au programme, la preuve de ce résultat ne sera donnée que dans le cas où φ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in I$.
L'énoncé général (qui figure au programme) dépasse largement le cadre de ce cours ; en effet, la variable aléatoire $\varphi(X)$ ne relève pas toujours d'un des deux cas (variables à densité ou discrète) pour lesquels l'espérance a été introduite rigoureusement. On notera en particulier l'hypothèse de convergence *absolue* qui est essentielle.

Exemple 3.11 Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{R}$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que $Y = \mathbf{e}^X$ n'admet pas d'espérance, puis que $Z = X^2$ admet aussi une espérance égale à $\mathbb{E}(Z) = \Gamma(3) = 2$.

COROLLAIRE 3.12 *Si* X *admet une espérance alors, pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ *admet une espérance et*

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b.$$

3.3 Variance

PROPOSITION 3.13 *Si* X *admet un moment d'ordre* 2*, alors elle admet une espérance.*

LEMME 3.14 *La variable aléatoire* X *admet un moment d'ordre* 2 *si, et seulement si,* X^2 *admet une espérance et, dans ce cas,* $\mathbb{M}_2(X) = \mathbb{E}(X^2)$.

DÉFINITION 3.15 *On dit que* X *admet une* ***variance*** *si* X *admet une espérance et* $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ *admet une espérance. On appelle alors* ***variance*** *(ou moment centré d'ordre 2) de* X*, et l'on note* $\mathbb{V}(X)$*, le réel*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big] = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(t - \mathbb{E}(X)\big)^2 f_X(t)\,dt.$$

DÉFINITION 3.16 *Si* X *admet une variance, on appelle* ***écart-type*** *de* X *le réel* $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{X})}$.

THÉORÈME 3.17 (FORMULE DE KOENIG-HUYGENS) *La variable aléatoire* X *admet une variance si, et seulement si, elle admet un moment d'ordre 2. Dans ces conditions,*

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{M}_2(\mathrm{X}) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2 = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2.$$

THÉORÈME 3.18 *Si* X *admet une variance alors, pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$, $a\mathrm{X} + b$ *admet aussi une variance et :*

$$\mathbb{V}(a\mathrm{X} + b) = a^2\,\mathbb{V}(\mathrm{X}).$$

Exemples 3.19 Étudier l'existence d'une variance pour X et le cas échéant la calculer dans les cas suivants :
(i) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
(ii) X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
(iii) X admet pour densité

$$f_{\mathrm{X}} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2/x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

DÉFINITION 3.20 *(i) On dit que* X *est* ***centrée*** *si* X *admet une espérance et* $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$.
(ii) On dit que X *est* ***centrée réduite*** *si* X *admet un moment d'ordre 2,* $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$ *et* $\sigma(\mathrm{X}) = 1$.

PROPOSITION 3.21 *Si* X *admet un moment d'ordre 2, alors* $\mathrm{X}^* = \dfrac{\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})}{\sigma(\mathrm{X})}$ *est centrée réduite.*

Remarque 3.22 La variable aléatoire X^* de la proposition précédente est parfois appelée variable centrée réduite associée à X.

4. Fonctions de variables aléatoires réelles

4.1 Densité d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité

DÉFINITION 4.1 *Soient* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}$*, sauf peut-être en un nombre fini de points.*
On appelle ***produit de convolution*** *(ou* ***convolée****) de* f *et* g*, et l'on note* $f \star g$*, la fonction définie par*

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

en tout point $x \in \mathbb{R}$ *pour lequel l'intégrale impropre du membre de droite est convergente.*

Remarque 4.2 Si l'intégrale précédente converge en un point $x \in \mathbb{R}$, alors le changement de variable $u = x - t$ montre que $f \star g(x) = g \star f(x)$.

On admet le résultat suivant.

THÉORÈME 4.3 *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes, à densités respectives* f_{X} *et* f_{Y}.
Si le produit de convolution $f_{\mathrm{X}} \star f_{\mathrm{Y}}$ *est défini et continu sur* $\mathbb{R}$ *saut éventuellement en un nombre fini de points, alors la variable aléatoire* $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ *est à densité donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}(x) = f_{\mathrm{X}} \star f_{\mathrm{Y}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{X}}(t) f_{\mathrm{Y}}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques 4.4 • Ce résultat est à mettre en parallèle de celui donnant la loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} + \mathrm{Y} = x) = \sum_{t \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = t)\,\mathbb{P}(\mathrm{Y} = x - t).$$

- On admettra que les hypothèses du théorème sont en particulier satisfaites lorsque l'une des fonctions f_X et f_Y est bornée.

Exemples 4.5 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, à densité.
Déterminer la loi de $X + Y$ lorsque X et Y suivent toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 puis lorsqu'elles suivent toutes deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

4.2 Propriétés générales de l'espérance

Jusqu'ici, on a travaillé sur les variables aléatoires réelles discrètes ou à densité. En combinant deux variables aléatoires de type différent ou en appliquant le second théorème de transfert, on peut obtenir de nouvelles variables aléatoires ne relevant pas d'un des types discret ou à densité. On admettra les deux théorèmes suivants, de démonstration hors-programme (il faudrait avant tout étendre proprement la notion d'espérance, ce qui dépasse le cadre de ce cours), qui permet de manipuler leur espérance.

Théorème 4.6 (Existence d'une espérance par domination) *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles quelconques telles que* $|X| \leqslant Y$.
Si Y *admet une espérance, alors* X *admet une espérance et l'on a :* $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Théorème 4.7 *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles quelconques admettant chacune une espérance. La variable aléatoire* $X + Y$ *admet elle aussi une espérance, donnée par :*

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Remarque 4.8 Le résultat précédent s'étend à une suite finie $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires admettant chacune une espérance.

Proposition 4.9 (Croissance de l'espérance) *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles quelconques admettant chacune une espérance.*
Si $X \leqslant Y$ *presque sûrement, alors* $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

4.3 Cas de variables indépendantes

On admet également les théorèmes suivants, de la même veine que le précédent.

Théorème 4.10 *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles quelconques admettant chacune une espérance. Si* X *et* Y *sont indépendantes, alors le produit* XY *admet une espérance donnée par* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Théorème 4.11 *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles quelconques admettant chacune une variance. Si* X *et* Y *sont indépendantes, alors la somme* $X+Y$ *admet une variance donnée par* $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

Remarque 4.12 Les résultats précédents s'étendent à une suite finie $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant chacune une espérance (resp. une variance).

Remarque 4.13 On pourrait définir pour les variables aléatoires réelles à densité, de la même façon que pour les variables aléatoires réelles discrètes, la notion de covariance. Cette notion et les résultats qui gravitent autour sont hors-programme mais sont parfois introduits dans certains problèmes de concours.