Chapitre 7 :

DIAGONALISATION

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \geqslant 1$ est un entier et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, supposé de dimension finie n sauf mention expresse du contraire.
Pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ ayant pour coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (dans cet ordre).

1. Diagonalisation naïve des matrices carrées et applications

1.1 Position du problème

Définition 1.1 *Une matrice carrée* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite* ***diagonalisable*** *si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Remarque 1.2 Diagonaliser une matrice diagonalisable A consiste à produire des matrices $\mathrm{P} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $\mathrm{D} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.
Pour deux telles matrices P et D, la relation $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ équivaut à $\mathrm{AP} = \mathrm{PD}$. Or, si $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n$ désignent les colonnes de P et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D, on a en utilisant des notations par blocs :

$$\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} \mathrm{AC}_1 & \cdots & \mathrm{AC}_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{PD} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{C}_1 & \cdots & \lambda_n \mathrm{C}_n \end{pmatrix}.$$

La condition $\mathrm{AP} = \mathrm{PD}$ devient donc $\mathrm{AC}_i = \lambda_i \mathrm{C}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui conduit à la notion de valeur et de colonne propres de A :

Définition 1.3 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée.*
(i) On appelle ***valeur propre*** *de* A *tout scalaire* λ *pour lequel existe* $\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul *tel que* $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$.
(ii) On appelle ***colonne propre*** *de* A *toute matrice colonne* $\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle *pour laquelle existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$. *On dit que* λ *est la valeur propre de* A *associée à* X.

Remarque 1.4 La condition de non nullité dans la définition précédente porte sur X et non sur λ !

On a donc démontré dans la remarque 1.2 :

Théorème 1.5 *Une matrice* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base* $(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n)$ *de* $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *formée de colonnes propres de* A.
Dans ces conditions, la matrice définie par blocs $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_1 & \cdots & \mathrm{V}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible et vérifie* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, *où* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *sont les valeurs propres de* A *respectivement associées aux colonnes propres* $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n$.

1.2 Méthode pratique de recherche des valeurs propres

Trouver les colonnes propres de A pour une valeur propre λ donnée revient à résoudre un système linéaire et ne présente donc pas de difficulté a priori. Déterminer les valeurs propres revient à rechercher les scalaires λ pour lesquels ce système admet (au moins) une solution non nulle.

Proposition 1.6 *Pour* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a équivalence entre les assertions suivantes :*
(i) λ *est valeur propre de* A ;
(ii) la matrice $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ *n'est pas inversible ;*
(iii) $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) < n$.

En pratique, on utilise le déterminant pour tester l'inversibilité de la matrice $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ si $n = 2$.
Si $n \geqslant 3$, on utilise l'algorithme de Gauss pour avancer le calcul de $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$ jusqu'à obtenir $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = n$ sauf pour un nombre fini de valeurs de λ : certaines pour lesquelles le calcul a montré que $\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) < n$ et qui sont donc effectivement valeurs propres, et d'autres qui ont été écartées au cours du calcul (pour avoir des pivots non nuls). Il reste ensuite à décider si ces dernières sont effectivement valeurs propres, en reprenant le calcul du rang dans les cas considérés ou en étudiant le système $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ pour savoir s'il admet des solutions non nulles.

Exemple 1.7 Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 1.8 Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

1.3 Application au calcul des puissances d'une matrice carrée

La diagonalisation d'une matrice fournit une nouvelle méthode pour en calculer les puissances (cf. TD pour les autres méthodes). Plus précisément, pour une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, il existe $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. On a alors $A = PDP^{-1}$ et, par une récurrence élémentaire, $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où les puissances de D se calculent aisément : $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

2. Sous-espaces stables par un endomorphisme

On considère un endomorphisme u de E.

2.1 Définition et premiers exemples

Dans cette section, l'espace vectoriel E n'est pas supposé de dimension finie.

Définition 2.1 *Un sous-espace vectoriel* F *de* E *est dit* ***stable*** *par* u *si* $u(F) \subset F$, *i.e. si pour tout* $x \in F$, $u(x) \in F$.
Lorsque c'est le cas, l'endomorphisme u_F *de* F *défini par* $u_F : F \longrightarrow F, x \longmapsto u(x)$ *est appelé* ***endomorphisme induit*** *par* u *sur* F.

Exemples 2.2 (i) Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et E sont toujours stables par u.
(ii) Les noyaux itérés de u : $\operatorname{Ker} u, \operatorname{Ker} u^2, \dots, \operatorname{Ker} u^k, \dots$ sont stables par u.
(iii) De même, les images itérées de u : $\operatorname{Im} u, \operatorname{Im} u^2, \dots, \operatorname{Im} u^k, \dots$ sont stables par u.
(iv) Tout sous-espace vectoriel de E est stable par une homothétie donnée (en particulier, par l'identité ou l'application nulle).

Les deux exemples suivants montrent que l'étude des sous-espaces stables par un endomorphisme peut apporter des informations très précises.

Exemple 2.3 Un endomorphisme u de E est un projecteur si, et seulement si, il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G de E, tous les deux stables par u, sur lesquels u induit les endomorphismes $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 0$.

Exemple 2.4 Un endomorphisme u de E stabilise toutes les droites de E si, et seulement si, c'est une homothétie.

Il est donc toujours intéressant de produire des sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Le résultat suivant, classique mais hors-programme, va dans ce sens.

Exemple 2.5 Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent : $u \circ v = v \circ u$ (par exemple u et un polynôme en u).
Les sous-espaces $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.

2.2 Caractérisation matricielle

Dans cette section et la suivante, l'espace vectoriel E est à nouveau supposé de dimension finie n.

PROPOSITION 2.6 *Soit* F *un sous-espace vectoriel de dimension* p *de* E *ainsi qu'une base* $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ *de* E *obtenue par complétion d'une base* $\underline{e}' = (e_1, \ldots, e_p)$ *de* F.
Le sous-espace F *est stable par* u *si, et seulement si,* u *est représenté dans la base* $\underline{e}$ *par une matrice triangulaire par blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$$

avec $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathbf{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{C} \in \mathbf{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, A *est la matrice représentant l'endomorphisme* u_{F} *induit par* u *sur* F *dans la base* $\underline{e}'$.

Exemple 2.7 Cas particulier des sous-espaces stables $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.

2.3 Sous-espaces supplémentaires stables

PROPOSITION 2.8 *Soient* $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_r)$ *une famille de sous-espaces supplémentaires de* E *et* $\underline{e}$ *une base de* E *adaptée à la décomposition* $\mathrm{E} = \mathrm{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_r$, *i.e. obtenue par concaténation de bases* $\underline{e}_i$ *de chacun des* V_i, $1 \leqslant i \leqslant r$.
L'endomorphisme u *stabilise chacun des* V_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, *si, et seulement si, sa matrice dans la base* $\underline{e}$ *est diagonale par blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_r \end{pmatrix},$$

où A_i *est une matrice carrée d'ordre* $\dim \mathrm{V}_i$ *pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$.
Dans ce cas, la matrice A_i *représente l'endomorphisme* u_i *induit par* u *sur* V_i *dans la base* $\underline{e}_i$ *pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$.

Exemple 2.9 Soit s une symétrie de E, par rapport à un sous-espace F de dimension p, parallèlement à un sous-espace G. Donner la matrice de s dans une base adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exemple 2.10 Cas particulier où les sous-espaces stables $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires dans E.

3. Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

Dans ce paragraphe, l'espace vectoriel E n'est pas supposé de dimension finie.

3.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E.

DÉFINITION 3.1
- *On appelle* ***valeur propre*** *de* u *tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$ *pour lequel il existe* $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ *tel que* $u(x) = \lambda x$.
- *Lorsque* E *est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de* u *est noté* $\operatorname{Sp} u$ *et appelé* ***spectre*** *de* u.

DÉFINITION 3.2
- *On appelle* ***vecteur propre*** *de* u *tout vecteur* $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ *pour lequel il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $u(x) = \lambda x$ *; un tel vecteur propre* x *est dit associé à la valeur propre* λ.
- *Pour une valeur propre* λ *donnée de* u, *on appelle* ***sous-espace propre*** *de* u *associé à la valeur propre* λ *le sous-espace vectoriel*

$$\mathrm{E}_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_{\mathrm{E}}) = \{x \in \mathrm{E} : u(x) = \lambda x\}$$

de E. *Il est formé des vecteurs propres de* u *pour la valeur propre* λ *et du vecteur nul.*

Exemples 3.3 Déterminer les éléments propres d'une homothétie, d'un projecteur, d'une symétrie.

Exemple 3.4 Éléments propres de l'endomorphisme dérivation $\mathrm{D} : f \longmapsto f'$ de l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.5 *On suppose l'espace vectoriel* E *de dimension finie.*
Un scalaire λ est valeur propre de u si, et seulement si, l'endomorphisme $u - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ n'est pas inversible.
En particulier, 0 *est valeur propre de u si, et seulement si, u n'est pas inversible.*

La remarque suivante donne un premier lien avec les sous-espaces stables.

Remarque 3.6 Soit D une droite de E, dirigée par un vecteur x (nécessairement non nul).
La droite D est stable par u si, et seulement si, le vecteur x est propre pour u.

Exemple 3.7 Un endomorphisme peut n'admettre aucune valeur propre. Montrer qu'il en va ainsi de l'endomorphisme r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\mathrm{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Quels sont les sous-espaces stables par cet endomorphisme ?

3.2 Éléments propres d'une matrice carrée

On reformule et approfondit les définitions du premier paragraphe pour une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 3.8 *Les éléments propres de* A *sont ceux de l'endomorphisme $\phi_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{AX}$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui lui est canoniquement associé :*

- *On appelle* ***valeur propre*** *de* A *tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe $\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que* $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$.
- *L'ensemble des valeurs propres de* A *est noté* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}\,\mathrm{A}$ *et appelé* ***spectre*** *de* A.
- *On appelle* ***colonne propre*** *de* A *toute matrice colonne $\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$; une telle colonne propre* X *est dite associée à la valeur propre λ.*
- *Pour une valeur propre λ donnée de* A, *on appelle* ***sous-espace propre*** *de* A *associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel*
$$\mathrm{E}_{\lambda}(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}(\phi_{\mathrm{A}} - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})}) = \{\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : \mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}\}$$
de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, formé des colonnes propres de A *pour la valeur propre λ et de la colonne nulle.*

Remarque 3.9 Soit u un endomorphisme de E, représenté en base $\underline{e}$ par une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
L'application qui, à une colonne $\mathrm{X} = {}^t\!\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, associe le vecteur $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ de E ayant pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\underline{e}$ est un isomorphisme φ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sur E.
L'endomorphisme u et la matrice A ont les mêmes valeurs propres et, pour une telle valeur propre λ, l'isomorphisme φ induit un isomorphisme entre les sous-espaces propres $\mathrm{E}_{\lambda}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{E}_{\lambda}(u)$; en d'autres termes, un vecteur $x \in \mathrm{E}$ est propre pour u associé à la valeur propre λ si, et seulement si, la colonne $\mathrm{X} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de ses coordonnées dans la base $\underline{e}$ est propre pour A associée à la valeur propre λ.

Proposition 3.10 *Un scalaire λ est valeur propre de* A *si, et seulement si, la matrice $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_n$ n'est pas inversible.*
En particulier, 0 *est valeur propre de* A *si, et seulement si,* A *n'est pas inversible.*

Corollaire 3.11 *Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.*

Proposition 3.12 *Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres.*

Remarque 3.13 Il ressort des deux résultats précédents que si $\mathrm{P} \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible telle que la matrice $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit triangulaire, alors les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A.

C'est en particulier le cas si $\mathrm{T} = \mathrm{D}$ est diagonale, et l'on peut alors préciser que le nombre d'occurrences d'une valeur propre λ de A sur la diagonale de D est donné par $\dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = n - \mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$.

Remarque 3.14 Pour une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, il y a lieu de distinguer valeurs propres réelles (au sens précédent) et valeurs propres complexes (i.e. valeurs propres de A considérée comme élément de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$). On s'en convaincra sur l'exemple de la matrice $\mathrm{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

3.3 Valeurs propres et polynômes annulateurs

Définition 3.15 *On appelle **polynôme annulateur** d'un endomorphisme u de* E *tout polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *tel que* $\mathrm{P}(u) = 0$.
On définit de même la notion de polynôme annulateur d'une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarques 3.16 Soit u un endomorphisme de E.

- Un polynôme annulateur pour u est une relation de dépendance linéaire entre les puissances de u.
- Déterminer un polynôme annulateur de degré d pour u revient à exprimer u^d comme combinaison linéaire de $u^{d-1}, \ldots, u, \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Les mêmes remarques valent pour une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3.17 Déterminer un polynôme annulateur de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.18 *(i) Si l'espace vectoriel* E *est de dimension finie, tout endomorphisme de* E *admet un polynôme annulateur non nul.*
(ii) Toute matrice carrée admet un polynôme annulateur non nul.

Lemme 3.19 *Soient u un endomorphisme de* E, $x \in \mathrm{E}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
Si x est vecteur propre de u pour la valeur propre λ, alors il est aussi vecteur propre de $\mathrm{P}(u)$ *pour la valeur propre* $\mathrm{P}(\lambda)$.

Proposition 3.20 *Soient u un endomorphisme de* E *et* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *un polynôme annulateur de u.*
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ *est valeur propre de u, alors* $\mathrm{P}(\lambda) = 0$. *La réciproque est fausse.*
On dispose d'un résultat analogue pour une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3.21 Retrouver les valeurs propres d'un projecteur et d'une symétrie.

Exemple 3.22 Quelles sont les valeurs propres réelles de la matrice A de l'exemple 3.17 ?

3.4 Propriété fondamentale des sous-espaces propres

Lemme 3.23 *Soient u un endomorphisme de* E *et λ une valeur propre de u.*
Le sous-espace propre $\mathrm{E}_\lambda(u)$ *est stable par u ; l'endomorphisme induit par u sur ce sous-espace est l'homothétie de rapport λ.*

Théorème 3.24 *Soit u un endomorphisme de* E.
(i) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *sont des valeurs propres deux-à-deux distinctes de u, les sous-espaces propres associés* $\mathrm{E}_{\lambda_1}(u), \ldots, \mathrm{E}_{\lambda_r}(u)$ *sont en somme directe.*
(ii) Toute famille de vecteurs propres de u pour des valeurs propres deux-à-deux distinctes est libre.
On dispose d'un énoncé analogue pour une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3.25 Les fonctions $e_\lambda : x \longmapsto \mathbf{e}^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

COROLLAIRE 3.26 *(i) Si l'espace vectoriel* E *est de dimension finie n, alors un endomorphisme u donné de* E *admet au plus n valeurs propres et :*

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leqslant n.$$

(ii) Une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *admet au plus n valeurs propres et :*

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} \mathrm{A}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \leqslant n.$$

4. Diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

4.1 Endomorphismes diagonalisables

Soit u un endomorphisme de E.

LEMME 4.1 *Soit* $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E.
L'endomorphisme u est représenté en base $\underline{e}$ *par une matrice diagonale* D *si, et seulement si, les vecteurs* $e_1, \ldots, e_n$ *sont propres pour u. Les coefficients diagonaux de* D *sont alors les valeurs propres de u respectivement associées aux vecteurs propres* $e_1, \ldots, e_n$.

DÉFINITION 4.2 *On dit que l'endomorphisme u est* ***diagonalisable*** *s'il existe une base de* E *formée de vecteurs propres de u, i.e. dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale.*

Exemple 4.3 Homothéties, projecteurs et symétries sont des endomorphismes diagonalisables.

THÉORÈME 4.4 *On a équivalence entre :*
(i) l'endomorphisme u est diagonalisable ;
(ii) les sous-espaces propres de u sont supplémentaires dans E *;*
(iii) la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension de E *:*

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = \dim \mathrm{E}.$$

Remarque 4.5 D'après le corollaire 3.26, la propriété (iii) équivaut à :

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \geqslant \dim \mathrm{E}.$$

COROLLAIRE 4.6 *Si u admet* $n = \dim \mathrm{E}$ *valeurs propres deux-à-deux distinctes, alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.*

Remarque 4.7 À l'opposé, un endomorphisme admettant une unique valeur propre est diagonalisable si, et seulement si, c'est une homothétie.

Remarque 4.8 Pour un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension n, la diagonalisation de u peut donc s'effectuer selon le plan suivant :

1. *Recherche des valeurs propres*
   - A-t-on facilement une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire ? Les valeurs propres se lisent alors sur la diagonale de cette matrice.
   - A-t-on facilement un polynôme annulateur de u ? Les valeurs propres sont alors à rechercher parmi les racines de ce polynôme.

- Sinon, à quelle condition sur λ l'équation $u(x) = \lambda x$ admet-elle une solution $x \neq 0$? On pourra écrire cette équation sous la forme d'un système linéaire et appliquer la méthode décrite dans le premier paragraphe (déterminant si $n = 2$, pivot si $n \geqslant 3$) ou raisonner avec des arguments plus généraux sur l'équation elle-même.

2. *Diagonalisabilité*
   - Si u présente n valeurs propres, alors u est diagonalisable.
   - Sinon, déterminer la dimension de chaque sous-espace propre (par résolution d'un système linéaire ou utilisation d'un argument théorique type théorème du rang), puis conclure en utilisant l'équivalence :
$$u \text{ diagonalisable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = n.$$

3. *Diagonalisation* (le cas échéant)
   - Si cela n'a pas encore été fait, rechercher une base de chaque sous-espace propre. La famille ainsi obtenue est une base de E formée de vecteurs propres.
   - Préciser la matrice de u dans cette base (diagonale par construction).

4.2 Matrices carrées diagonalisables

Proposition 4.9 *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension n, représenté en base $\underline{e}$ par une matrice* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A *est diagonalisable.*

Remarque 4.10 En pratique, pour diagonaliser une matrice A lorsque celle-ci est diagonalisable, on explicitera une matrice $\mathrm{P} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, une matrice $\mathrm{D} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et on justifiera brièvement pourquoi les matrices choisies vérifient la relation $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$: soit en s'appuyant sur les arguments du premier paragraphe, soit par application de la formule de changement de base à l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Soit $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On obtient donc des critères de diagonalisabilité de A à partir de ceux établis dans la section précédente appliqués à l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A.

Théorème 4.11 *On a équivalence entre :*
(i) la matrice A *est diagonalisable ;*
(ii) les sous-espaces propres de A *sont supplémentaires dans* $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *;*
(iii) la somme des dimensions des sous-espaces propres de A *est égale à n :*
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(A)}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = n.$$

Remarque 4.12 D'après le corollaire 3.26, la propriété (iii) équivaut à :
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp\,A}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \geqslant n.$$

Corollaire 4.13 *Si* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *admet n valeurs propres deux-à-deux distinctes, alors* A *est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.*

Remarque 4.14 À l'opposé, si $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ admet une unique valeur propre λ, alors elle est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$.

Proposition 4.15 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux-à-deux distinctes. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note $n_i = \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A})$.*
Si A *est diagonalisable, alors*
$$\mathrm{tr}\,\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i.$$

Remarque 4.16 Le résultat précédent permet de détecter certaines erreurs de calcul une fois obtenues les valeurs propres de A à partir du calcul de $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n)$, sachant que $n_i = n-\mathrm{rg}(A-\lambda_i I_n)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ d'après le théorème du rang.

Le théorème suivant n'est pas explicitement au programme. Il peut être utile pour diriger son raisonnement ou ses calculs, mais doit être entièrement justifié s'il intervient dans l'argumentation.

THÉORÈME 4.17 *Soient* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée et* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ *des valeurs propres deux-à-deux distinctes de* A. *Pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$, *on note* $n_i = \dim E_{\lambda_i}(A)$.
Si $n_1 + \cdots + n_r = n - 1$ *et*

$$\lambda_0 = \mathrm{tr}\, A - \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\},$$

alors A *admet pour valeurs propres* $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ *et est diagonalisable.*

Enfin, on énonce dès maintenant le théorème suivant, que l'on admet provisoirement, qui sera démontré dans un prochain chapitre.

THÉORÈME 4.18 *Toute matrice* $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ *symétrique est diagonalisable.*