

Programme de colle : semaine 16
du 27 janvier au 31 janvier 2020

Espaces euclidiens

1. Bases orthonormales
2. Supplémentaire orthogonal
3. Application aux problèmes de minimisation

Distance à un sous-espace vectoriel. Pseudo-solutions d'un système linéaire : pour $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un et un seul vecteur $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|AX - B\|$; ce vecteur est l'unique solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$ (ce dernier point n'est pas au programme, il faut savoir le retrouver).

Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel du premier ordre

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n et à valeurs réelles.

1. Objets du calcul différentiel du premier ordre
Dérivées partielles et gradient. Dérivées directionnelles. Développement limité : définition, unicité, expression à l'aide du gradient ou des dérivées partielles, hyperplan tangent, lien entre dérivée directionnelle et gradient. Interprétation du gradient.
2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1
Définition et théorème fondamental (admis) : toute fonction de classe \mathcal{C}^1 admet en tout point un développement limité d'ordre 1 (donc est continue). Théorèmes opératoires (en particulier, dérivation d'une composée $t \in \mathbb{R} \mapsto f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$).
3. Calcul différentiel du second ordre
Dérivées partielles secondes. Fonctions de classe \mathcal{C}^2 , théorèmes opératoires, théorème de Schwarz (admis), matrice et forme hessienne en un point. Dérivée directionnelle seconde, développement limité d'ordre 2.

Introduction en TD aux problèmes d'extremums sur un ouvert : définition, lien avec les points critiques, exemples.