ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
Mathématiques

Programme de colle : semaine 15

du 20 au 24 janvier 2020

Espaces euclidiens

1. Bases orthonormales
   Définition, expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormale, coordonnées d'un vecteur en base orthonormale. Existence, matrice de passage entre deux bases orthonormales, matrices orthogonales. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Supplémentaire orthogonal
   Théorème fondamental : si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$. Théorème de la base orthonormale incomplète, orthogonal d'un hyperplan. Projecteurs orthogonaux : définition, caractérisation du projeté orthogonal, expression dans une base orthonormale $(v_i)_{i=1}^r$ du sous-espace sur lequel on projette, matrice en base orthonormale en fonction des colonnes de coordonnées des v_i.
3. Application aux problèmes de minimisation
   Distance à un sous-espace vectoriel. Pseudo-solutions d'un système linéaire : pour $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un et un seul vecteur $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|AX - B\|$; ce vecteur est l'unique solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$ (ce dernier point n'est pas au programme, il faut savoir le retrouver).