# Programme de colle : semaine 14

du 13 au 17 janvier 2020

### ***Lois continues classiques***

1. Loi uniforme
   Définition par la densité, fonction caractéristique, transformation affine. Moments.
2. Loi exponentielle
   Définition par la densité, fonction caractéristique, transformation linéaire. Moments. Caractérisation par l'absence de mémoire.
3. Loi $\gamma$
   Définition par la densité. Moments. Stabilité : somme de variables aléatoires $X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, mutuellement indépendantes suivant des lois $\gamma(\nu_i)$ puis $\mathcal{E}(1)$.
4. Loi normale ou gaussienne
   Définition par la densité, notation $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour une espérance $m$ et une variance $\sigma^2$, transformation affine. Étude de la densité et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Moments. Stabilité : somme de variables aléatoires $X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, mutuellement indépendantes suivant des lois $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

*Remarque.* Les lois $\Gamma$ sont désormais hors-programme.

### ***Fonctions de plusieurs variables : introduction***

*Peu d'exercices traités en classe. Seuls les meilleurs étudiants qui le souhaiteraient seront interrogés sur ce chapitre, qui ne constitue pas un objectif principal du programme.*
*Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles.*

1. Quelques parties convexes de $\mathbb{R}^n$
   Droites affines. Hyperplans affines. Parties convexes.
2. Rudiments de topologie
   Norme euclidienne. Distance euclidienne, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Parties bornées.
3. Graphe d'une fonction
   Définition et exemples. Lignes de niveau d'une fonction.
4. Limites et continuité
   Définition, lien limite-continuité, limite par encadrement. Convergence d'une suite vectorielle dans $\mathbb{R}^n$, caractérisation séquentielle de la continuité. Opérations sur les fonctions continues : opérations algébriques, composition, méthode pour démontrer l'absence de limite (trouver plusieurs chemins le long desquels la fonction a des limites distinctes). Continuité et fonctions partielles. Continuité et topologie : l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ est ouverte (resp. fermée), une fonction continue sur une partie fermée, bornée et non vide est bornée et atteint ses bornes.

### ***Espaces euclidiens***

1. Bases orthonormales
   Définition, expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormale, coordonnées d'un vecteur en base orthonormale. Existence, matrice de passage entre deux bases orthonormales, matrices orthogonales. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

T.S.V.P.

2. Supplémentaire orthogonal
   Théorème fondamental : si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E, $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$. Théorème de la base orthonormale incomplète, orthogonal d'un hyperplan. Projecteurs orthogonaux : définition, caractérisation du projeté orthogonal, expression dans une base orthonormale $(v_i)_{i=1}^{r}$ du sous-espace sur lequel on projette, matrice en base orthonormale en fonction des colonnes de coordonnées des $v_i$.
3. Application aux problèmes de minimisation
   Distance à un sous-espace vectoriel. Pseudo-solutions d'un système linéaire : pour $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $p$ et $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un et un seul vecteur $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|AX - B\|$ ; ce vecteur est l'unique solution du système de Cramer ${}^{t}AAX = {}^{t}AB$ (ce dernier point n'est pas au programme, il faut savoir le retrouver).