Programme de colle : semaine 13

du 6 au 10 janvier 2020

Produit scalaire et orthogonalité

1. Formes bilinéaires
   Définition. Représentation matricielle, expression dans une base, formule de changement de base. Formes bilinéaires symétriques (caractérisation matricielle), définies et définies-positives, inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Produits scalaires
   Définition. Exemples usuels : produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (expressions matricielles pour les deux derniers), produit scalaire usuel sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Norme euclidienne associée à un produit scalaire : définition et propriétés, distance euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwarz, identités remarquables, identités de polarisation et du parallélogramme.
3. Orthogonalité
   Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre, théorème de Pythagore, vecteur normé ou unitaire, famille orthonormale. Vecteur orthogonal à un sous-espace, stabilité de l'orthogonalité à un vecteur par combinaison linéaire, orthogonal d'un sous-espace : c'est un sous-espace, exemples, propriétés, la condition $x \in \mathrm{F}^{\perp}$ équivaut à l'orthogonalité de x aux vecteurs d'une famille génératrice de F, la somme $\mathrm{F}+\mathrm{F}^{\perp}$ est directe, $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\perp\perp}$. Sous-espaces orthogonaux, vérification sur les vecteurs de deux familles génératrices, une somme de sous-espaces deux-à-deux orthogonaux est directe.

Lois continues classiques

1. Loi uniforme
   Définition par la densité, fonction caractéristique, transformation affine. Moments.
2. Loi exponentielle
   Définition par la densité, fonction caractéristique, transformation linéaire. Moments. Caractérisation par l'absence de mémoire.
3. Loi γ
   Définition par la densité. Moments. Stabilité : somme de variables aléatoires X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, mutuellement indépendantes suivant des lois $\gamma(\nu_i)$ puis $\mathcal{E}(1)$.
4. Loi normale ou gaussienne
   Définition par la densité, notation $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ pour une espérance m et une variance σ^2, transformation affine. Étude de la densité et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Moments. Stabilité : somme de variables aléatoires X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, mutuellement indépendantes suivant des lois $\mathcal{N}(m_i,\sigma_i^2)$.

Remarque. Les lois Γ sont désormais hors-programme.

Fonctions de plusieurs variables : introduction

Peu d'exercices traités en classe. Seuls les meilleurs étudiants qui le souhaiteraient seront interrogés sur ce chapitre, qui ne constitue pas un objectif principal du programme.
Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles.

1. Quelques parties convexes de $\mathbb{R}^n$
   Droites affines. Hyperplans affines. Parties convexes.

2. Rudiments de topologie
   Norme euclidienne. Distance euclidienne, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Parties bornées.
3. Graphe d'une fonction
   Définition et exemples. Lignes de niveau d'une fonction.
4. Limites et continuité
   Définition, lien limite-continuité, limite par encadrement. Convergence d'une suite vectorielle dans $\mathbb{R}^n$, caractérisation séquentielle de la continuité. Opérations sur les fonctions continues : opérations algébriques, composition, méthode pour démontrer l'absence de limite (trouver plusieurs chemins le long desquels la fonction a des limites distinctes). Continuité et fonctions partielles. Continuité et topologie : l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ est ouverte (resp. fermée), une fonction continue sur une partie fermée, bornée et non vide est bornée et atteint ses bornes (admis).