ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
Mathématiques

Programme de colle : semaine 12

du 16 au 20 décembre 2019

Compléments sur les variables aléatoires réelles, variables aléatoires à densité

1. Généralités sur les variables aléatoires réelles
   Notion de variable aléatoire réelle. Théorèmes opératoires (admis). Loi d'une variable aléatoire réelle, tribu associée. Fonction de répartition d'une variable aléatoire, propriétés caractéristiques, caractérisation de la loi par la fonction de répartition, cas d'une variable discrète. Vecteur aléatoire, fonction de répartition. Variables aléatoires indépendantes.
2. Variables aléatoires à densité
   Une variable aléatoire réelle X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points. Densité d'une telle variable X : toute fonction f_X à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}$, égale à la dérivée de la fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Existence et interprétation d'une densité : $\mathbb{P}(X = x) = 0$ mais $\mathbb{P}(x < X \leqslant x + h) \sim f_X(x) \cdot h$ lorsque $h \to 0$ (si $f_X(x) = F'_X(x) \neq 0$). Expression intégrale de la fonction de répartition à l'aide de la densité, caractérisation de la loi par la densité. Exemple des lois uniforme sur $[0, 1]$ et exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Densité de $Y = \varphi(X)$ pour quelques fonctions φ classiques et lorsque φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x.
3. Moments d'une variable aléatoire à densité
   Moment d'ordre n d'une variable X à densité f_X : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_X(t)\,dt$ en cas de convergence (automatiquement absolue, les seules bornes de généralisation en lesquelles la convergence n'est pas automatique sont $\pm\infty$). Espérance, positivité, existence pour une variable presque sûrement bornée, théorème de transfert : espérance de $\varphi(X)$ lorsque φ est continue sauf peut-être en un nombre fini de points (avec toutes les réserves nécessaires), développement de $\mathbb{E}(aX + b)$. Variance, l'existence équivaut à celle du moment d'ordre 2, formule de Koënig-Huygens, développement de $\mathbb{V}(aX + b)$. Variable centrée réduite associée à une variable à densité admettant une variance.
4. Fonctions de variables aléatoires réelles (tout est admis dans ce paragraphe)
   Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à densités f_X et f_Y dont le produit de convolution $f_X \star f_Y$ est continu sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points (condition réalisée si f_X ou f_Y est bornée), alors $f_X \star f_Y$ est une densité de $X + Y$. Les résultats suivants concernent tous types de variables aléatoires (non nécessairement discrètes ou à densité) : existence d'une espérance par domination, linéarité et croissance de l'espérance, espérance du produit et variance de la somme de deux variables indépendantes.

Produit scalaire et orthogonalité

1. Formes bilinéaires
   Définition. Représentation matricielle, expression dans une base, formule de changement de base. Formes bilinéaires symétriques (caractérisation matricielle), définies et définies-positives, inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Produits scalaires
   Définition. Exemples usuels : produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (expressions matricielles pour les deux derniers), produit scalaire usuel sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. Norme euclidienne associée à un produit scalaire : définition et propriétés, distance euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwarz, identités remarquables, identités de polarisation et du parallélogramme.

3. Orthogonalité
   Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre, théorème de Pythagore, vecteur normé ou unitaire, famille orthonormale. Vecteur orthogonal à un sous-espace, stabilité de l'orthogonalité à un vecteur par combinaison linéaire, orthogonal d'un sous-espace : c'est un sous-espace, exemples, propriétés, la condition $x \in \mathrm{F}^{\perp}$ équivaut à l'orthogonalité de x aux vecteurs d'une famille génératrice de F, la somme $\mathrm{F} + \mathrm{F}^{\perp}$ est directe, $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\perp\perp}$. Sous-espaces orthogonaux, vérification sur les vecteurs de deux familles génératrices, une somme de sous-espaces deux-à-deux orthogonaux est directe.