ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
Mathématiques

Programme de colle : semaine 6

du 4 au 8 novembre 2019

Algèbre linéaire (révisions et compléments)

1. Espaces vectoriels
Notion d'espace vectoriels, exemples. Sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, exemples, sous-espace engendré, somme de plusieurs sous-espaces. Familles libres, familles génératrices, bases. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie : théorème de la base incomplète, existence de bases, définition de la dimension, dimension des espaces classiques, caractérisation des bases parmi les familles libres, parmi les familles génératrices, dimension d'un sous-espace vectoriel, d'un produit cartésien d'espaces, de la somme de deux sous-espaces. Rang d'une famille de vecteurs : définition, caractérisation de la liberté par le rang.
2. Calcul matriciel (paragraphe à réviser seul par les étudiants)
Opérations matricielles : structure vectorielle de $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, produit, puissances et polynômes de matrices, formule du binôme de Newton, transposée. Matrices par blocs. Algorithme du pivot de Gauss. Trace d'une matrice carrée.
3. Applications linéaires
Définition, endomorphismes, isomorphismes, automorphismes, noyau et image d'une application linéaire, application à la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire, sous-espace stable et endomorphisme induit. Opérations sur les applications linéaires : structure vectorielle de $\mathbf{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, composition, itérés et polynômes d'endomorphismes. Caractérisation d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ, deux espaces de dimension finie sont isomorphismes si, et seulement si, ils ont même dimension. Rang d'une application linéaire : définition, théorème du rang, application à la caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité d'une application linéaire, cas où la source et le but sont de même dimension finie.
4. Représentations matricielles
Représentation matricielle d'un vecteur dans une base, d'une application linéaire dans des bases, matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires, d'une composée, d'un isomorphisme, isomorphisme entre $\mathbf{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Interprétation géométrique canonique des matrices. Matrices de passage, formules de changement de bases pour les vecteurs, pour les applications linéaires, pour les endomorphismes. Matrices semblables. Rang d'une matrice, caractérisations de l'inversibilité d'une matrice carrée.
5. Sous-espaces supplémentaires, projecteurs et symétries
Famille finie de sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires, exemple des sous-espaces de matrices symétriques et antisymétriques, base adaptée à une famille de sous-espaces supplémentaires, existence et dimension d'un supplémentaire. Projecteur sur un sous-espace parallèlement à un supplémentaire, caractérisation des projecteurs parmi les endomorphismes. Symétrie par rapport à un sous-espace parallèlement à un supplémentaire, caractérisation des symétries parmi les endomorphismes. *À partir de jeudi :* Formes linéaires, hyperplans (en dimension quelconque), caractérisation des hyperplans comme noyaux de formes linéaires non nulles, unicité de l'équation à multiplication près par un scalaire non nul, cas de la dimension finie.